Aux colleurs

Merci aux collègues qui ont accepté de coller cette année en PSI*. Les colles sont une composante importante de la préparation aux concours. Il s'agit de vérifier pendant la colle que les étudiants connaissent précisément les résultats de cours, et en même temps de leur apporter éventuellement un éclairage nouveau pour les faire progresser dans leur compréhension des raisonnements qu'ils doivent maîtriser.

Je vous remercie d'interroger systématiquement les étudiants sur un « exercice ou résultat classique », qu'ils auront préparé, puis de proposer un ou deux exercices en privilégiant les raisonnements très classiques aux astuces. Si l'exercice préparé est long, il pourra être tronqué. Par exemple, on pourra ne faire traiter que les deux premières questions de l'exercice $\boxed{201.5}$.

Un rapide compte-rendu ainsi que les notes me seront transmises, de préférence par mail, ou alors dans mon casier.

Le programme officiel de la classe de PSI/PSI* est disponible sur le site :

`http://psietoile.lamartin.fr`

201. Fonctions d'une variable réelle

Il s'agit essentiellement d'exercices de révision portant sur le programme de première année. Les points abordés sont les suivants :

Fonctions usuelles, analyse asymptotique, continuité, dérivabilité, convexité, intégration sur un segment. Formule de Taylor avec reste-intégral.

202. Intégration

Aux colleurs. *On présente la plupart des énoncés en parlant d'intégrabilité. La règle « $x^\alpha f(x)$ » n'est pas mentionnée dans le programme et n'apparaît pas dans mon cours. Les étudiants ne l'utiliseront pas, mais utiliseront des comparaisons comme* $\ln(x) \in \mathrm{O}(\sqrt{x})$.

Fonctions continues par morceaux Définitions et exemples. Intégrale sur un segment d'une fonction cpm. *Il s'agit essentiellement de poser le cadre dans lequel on va travailler. On ne posera pas aux étudiants de question spécifique sur la continuité par morceaux, sauf si l'étudiant fait preuve d'une aisance manifeste.*

Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$ Intégrale convergente, intégrale divergente. Cas des fonctions positives.

Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque Intégrale convergente, intégrale divergente. Exemples de référence ($\frac{1}{t^\alpha}$, $\mathrm{e}^{-\alpha t}$, $\ln t$). Propriétés. Techniques de calcul d'une intégrale généralisée : utilisation d'une primitive, intégration par parties, changement de variable.

Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables Convergence absolue d'une intégrale généralisée. Intégrabilité d'une fonction. Techniques d'étude : comparaison par $\leqslant$ des valeurs absolues, comparaison par domination (ou prépondérance), comparaison par équivalence. Méthode d'éclatement.

Exercices et résultats classiques à connaître

201.1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer à l'aide du symbole $\prod$ puis à l'aide de factorielles le produit :

$$p_n = 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2) \cdot (2n)$$

201.2

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $x_n \in I_n = \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan x_n = x_n$.

(b) Montrer qu'il existe des réels a, b, c, d que l'on déterminera tels que :

$$x_n \underset{n \to +\infty}{=} a\,n + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

201.3

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

(b) En déduire que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donner les valeurs de $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

201.4

On souhaite calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + x + 1}$.

(a) Peut-on factoriser $x^2 + x + 1$?

(b) Écrire $x^2 + x + 1$ comme la somme de deux carrés : $(x + \dots)^2 + (\dots)^2$.

(c) En déduire un changement de variable permettant de faire apparaître $\displaystyle\int_{\dots}^{\dots} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 1}$.

(d) En déduire la valeur de I.

201.5

On appelle **intégrales de Wallis** les intégrales définies, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \,\mathrm{d}x$$

On note aussi $V_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x$.

(a) Démontrer que $W_n = V_n$. Calculer W_0 et W_1.

(b) Déterminer une relation liant W_n et W_{n-2} pour $n \geqslant 2$. En déduire l'expression de W_n.

(c) Démontrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, convergente vers un réel ℓ. Calculer $W_{2p}\times W_{2p+1}$ pour $p \in \mathbb{N}$. En déduire ℓ.

(d) Déterminer un équivalent de $(W_n)_n$.

(e) Utiliser $\frac{W_{2p+1}}{W_{2p}}$ pour montrer :

$$\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!\sqrt{p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \sqrt{\pi}$$

201.6

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que :

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

202.1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$.
Trouver une relation entre I_n et I_{n+1} et en déduire I_n.

202.2

Étudier la convergence de :

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,\ln t}\,\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$

202.3

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

(a) Montrer l'existence de I_n, pour tout n.

(b) Déterminer la limite de $(I_n)_n$.

(c) À l'aide d'une intégration par parties, trouver un équivalent simple de I_n.

202.4

(a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale convergente.

(b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale divergente.

(c) En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$? La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

202.5

Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\,\mathrm{d}x$.

202.6

Utiliser les complexes pour calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$