## Aux colleurs

Merci aux collègues qui ont accepté de coller cette année en PSI*. Les colles sont une composante importante de la préparation aux concours. Il s'agit de vérifier pendant la colle que les étudiants connaissent précisément les résultats de cours, et en même temps de leur apporter éventuellement un éclairage nouveau pour les faire progresser dans leur compréhension des raisonnements qu'ils doivent maîtriser.
Je vous remercie d'interroger systématiquement les étudiants sur un « exercice ou résultat classique », qu'ils auront préparé, puis de proposer un ou deux exercices en privilégiant les raisonnements très classiques aux astuces. Si l'exercice préparé est long, il pourra être tronqué. Par exemple, on pourra ne faire traiter que les deux premières questions de l'exercice 201.5.
Un rapide compte-rendu ainsi que les notes me seront transmises, de préférence par mail, ou alors dans mon casier.
Le programme officiel de la classe de PSI/PSI* est disponible sur le site :

`http://psietoile.lamartin.fr`

## 201. Fonctions d'une variable réelle

Il s'agit essentiellement d'exercices de révision portant sur le programme de première année. Les points abordés sont les suivants :
Fonctions usuelles, analyse asymptotique, continuité, dérivabilité, convexité, intégration sur un segment. Formule de Taylor avec reste-intégral.

## Exercices et résultats classiques à connaître

**201.1**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer à l'aide du symbole $\prod$ puis à l'aide de factorielles le produit :

$$p_n = 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2) \cdot (2n)$$

**201.2**

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $x_n \in I_n = \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan x_n = x_n$.

(b) Montrer qu'il existe des réels $a, b, c, d$ que l'on déterminera tels que :

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} a\,n + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

**201.3**

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ :

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

(b) En déduire que $f$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donner les valeurs de $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**201.4**

On souhaite calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$.

(a) Peut-on factoriser $x^2+x+1$ ?

(b) Écrire $x^2+x+1$ comme la somme de deux carrés : $(x+\dots)^2+(\dots)^2$.

(c) En déduire un changement de variable permettant de faire apparaître $\displaystyle\int_{\dots}^{\dots} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$.

(d) En déduire la valeur de $I$.

**201.5**

On appelle **intégrales de Wallis** les intégrales définies, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \,\mathrm{d}x$$

On note aussi $V_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x$.

(a) Démontrer que $W_n = V_n$. Calculer $W_0$ et $W_1$.

(b) Déterminer une relation liant $W_n$ et $W_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$. En déduire l'expression de $W_n$.

(c) Démontrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, convergente vers un réel $\ell$. Calculer $W_{2p}\times W_{2p+1}$ pour $p \in \mathbb{N}$. En déduire $\ell$.

(d) Déterminer un équivalent de $(W_n)_n$.

(e) Utiliser $\frac{W_{2p+1}}{W_{2p}}$ pour montrer :

$$\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!\sqrt{p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \sqrt{\pi}$$

**201.6**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que :

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$