# 101. Espaces vectoriels, endomorphismes et matrices

**Aux colleurs.** *On pourra poser tout exercice très classique d'algèbre linéaire simple portant sur le programme de première année.*

**Produit et somme d'espaces vectoriels** Produit d'espaces vectoriels, définition, opérations, cas de la dimension finie. Somme de sous-e.v. Sous-e.v. en somme directe, définition, caractérisation. Sommes directes et bases, base adaptée à $\oplus F_i$, décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base, dimension de la somme de sous-e.v. Cas de deux sous-espaces vectoriels, espaces supplémentaires.

**Matrices et endomorphismes** Matrices par blocs, définition, combinaisons linéaires, produit, cas des matrices diagonales (resp. triangulaires) par blocs. Sous-espaces stables, endomorphisme induit, si $u \circ v = v \circ u$ alors $\operatorname{Ker} u$ estt stables par $v$. Stabilité et matrices par blocs. Matrices semblables, définition, relation d'équivalence, rang, déterminant. Trace, définition, c'est une forme linéaire, $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$, deux matrices semblables ont la même trace. Polynôme d'endomorphisme et de matrice, définition, opérations, propriétés, polynôme annulateur. Exemples.

# Exercices et résultats classiques à connaître

**101.1**

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $u^2 = 0$ et $u \neq 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\operatorname{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**101.2**

Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie.
On pose

$$N = \bigcup_{p=0}^{\infty} \operatorname{Ker} u^p \text{ et } I = \bigcap_{p=0}^{\infty} \operatorname{Im} u^p$$

(a) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N = \operatorname{Ker} u^n$ et $I = \operatorname{Im} u^n$.

(b) Établir que $N$ et $I$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires stables par $u$ et tels que les applications induites par $u$ à $N$ et $I$ sont respectivement nilpotente et bijective.

**101.3**

Soit $f$ un endomophisme de $E$. On suppose que, pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est liée.
Montrer que $f$ est un homothétie.

**101.4**

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose $A$ et $B$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**101.5**

Soit $u$ un projecteur en dimension finie.
Montrer que sa trace est égale à son rang.

$\boxed{\textbf{101.6}}$

Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Montrer que $A$ est inversible.
*Lorsqu'elle satisfait cette propriété, on dit que A est à diagonale strictement dominante.*
*Ce résultat porte le nom de théorème de Hadamard.*

$\boxed{\textbf{101.7}}$

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension quelconque, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que $P$ est annulateur de $u$, et que 0 est racine simple de $P$.

(a) Montrer que $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u$.

(b) En déduire que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.