101. Espaces vectoriels, endomorphismes et matrices

Aux colleurs. *On pourra poser tout exercice classique d'algèbre linéaire portant sur le programme de première année.*

Produit et somme d'espaces vectoriels Produit d'espaces vectoriels, définition, opérations, cas de la dimension finie. Somme de sous-e.v. Sous-e.v. en somme directe, définition, caractérisation. Sommes directes et bases, base adaptée à $\oplus F_i$, décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base, dimension de la somme de sous-e.v. Cas de deux sous-espaces vectoriels, espaces supplémentaires.

Matrices et endomorphismes Matrices par blocs, définition, combinaisons linéaires, produit, cas des matrices diagonales (resp. triangulaires) par blocs. Sous-espaces stables, endomorphisme induit, si $u \circ v = v \circ u$ alors $\operatorname{Ker} u$ estt stables par v. Stabilité et matrices par blocs. Matrices semblables, définition, relation d'équivalence, rang, déterminant. Trace, définition, c'est une forme linéaire, $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$, deux matrices semblables ont la même trace. Polynôme d'endomorphisme et de matrice, définition, opérations, propriétés, polynôme annulateur. Exemples. Interpolation de Lagrange.

Déterminants Rappels sur les propriétés du déterminant d'une matrice carrée, définition, règles de calcul, développement par rapport à une colone. Déterminant diagonal ou triangulaire, déterminant triangulaire par blocs, déterminant tridiagonal, déterminant de Vandermonde, matrice compagnon.

Exercices et résultats classiques à connaître

101.1

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $u^2 = 0$ et $u \neq 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\operatorname{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

101.2

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
On pose

$$N = \bigcup_{p=0}^{\infty} \operatorname{Ker} u^p \text{ et } I = \bigcap_{p=0}^{\infty} \operatorname{Im} u^p$$

(a) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N = \operatorname{Ker} u^n$ et $I = \operatorname{Im} u^n$.

(b) Établir que N et I sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires stables par u et tels que les applications induites par u à N et I sont respectivement nilpotente et bijective.

101.3

Soit f un endomophisme de E. On suppose que, pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est liée.
Montrer que f est un homothétie.

101.4

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose A et B semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

101.5

Soit u un projecteur en dimension finie.
Montrer que sa trace est égale à son rang.

101.6

Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Montrer que A est inversible.
Lorsqu'elle satisfait cette propriété, on dit que A est à diagonale strictement dominante.
Ce résultat porte le nom de théorème de Hadamard.

101.7

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension quelconque, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que P est annulateur de u, et que 0 est racine simple de P.

(a) Montrer que $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u$.

(b) En déduire que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

101.8

Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On désigne par D_n le déterminant de A_n.

(a) Montrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.

(b) Déterminer D_n en fonction de n.