101. Espaces vectoriels, endomorphismes et matrices

Aux colleurs. *On pourra poser tout exercice classique d'algèbre linéaire portant sur le programme de première année.*

Produit et somme d'espaces vectoriels Produit d'espaces vectoriels, définition, opérations, cas de la dimension finie. Somme de sous-e.v. Sous-e.v. en somme directe, définition, caractérisation. Sommes directes et bases, base adaptée à $\oplus F_i$, décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base, dimension de la somme de sous-e.v. Cas de deux sous-espaces vectoriels, espaces supplémentaires.

Matrices et endomorphismes Matrices par blocs, définition, combinaisons linéaires, produit, cas des matrices diagonales (resp. triangulaires) par blocs. Sous-espaces stables, endomorphisme induit, si $u \circ v = v \circ u$ alors $\operatorname{Ker} u$ estt stables par v. Stabilité et matrices par blocs. Matrices semblables, définition, relation d'équivalence, rang, déterminant. Trace, définition, c'est une forme linéaire, $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$, deux matrices semblables ont la même trace. Polynôme d'endomorphisme et de matrice, définition, opérations, propriétés, polynôme annulateur. Exemples. Interpolation de Lagrange.

Déterminants Rappels sur les propriétés du déterminant d'une matrice carrée, définition, règles de calcul, développement par rapport à une colone. Déterminant diagonal ou triangulaire, déterminant triangulaire par blocs, déterminant tridiagonal, déterminant de Vandermonde, matrice compagnon.

203. Compléments sur les suites et les séries numériques

Aux colleurs. *La règle « $n^\alpha u_n$ » n'est pas mentionnée dans le programme et n'apparaît pas dans mon cours. Les étudiants ne l'utiliseront pas, mais utiliseront des comparaisons comme $\ln(n) \in \mathrm{O}(\sqrt{n})$.*

Compléments sur les séries à valeurs réelles Technique de comparaison série/intégrale. Formule de Stirling. Règle de d'Alembert. Séries alternées. Méthode d'éclatement.

Produit de Cauchy de deux séries

Exercices et résultats classiques à connaître

101.1

Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On désigne par D_n le déterminant de A_n.

(a) Montrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.

(b) Déterminer D_n en fonction de n.

203.1

Étudier la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sin u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

203.2

Étudier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\cos u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

203.3

On considère une suite réelle $(u_n)_n$, et on note $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ la moyenne arithmétique de ses premiers termes.

(a) On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Démontrer que la suite $(v_n)_n$ converge vers 0.

(b) On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

(c) Que penser de la réciproque ?

203.4

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

En utilisant le lien suite-série, montrer que $(u_n)_n$ converge.
*On note traditionnellement γ sa limite, appelée **constante d'Euler**, et on a donc établi :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

203.5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin k$.

(a) Montrer que $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

(b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{\sin k}{k}$ converge.

203.6

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$