203. Compléments sur les suites et les séries numériques

Aux colleurs. *La règle « $n^\alpha u_n$ » n'est pas mentionnée dans le programme et n'apparaît pas dans mon cours. Les étudiants ne l'utiliseront pas, mais utiliseront des comparaisons comme $\ln(n) \in \mathrm{O}(\sqrt{n})$.*

Compléments sur les séries à valeurs réelles Technique de comparaison série/intégrale. Formule de Stirling. Règle de d'Alembert. Séries alternées. Méthode d'éclatement.

Produit de Cauchy de deux séries

102. Valeurs propres, vecteurs propres

Éléments propres d'un endomorphisme Valeurs propres, vecteurs propres. Sous-espaces propres. Propriétés.

Éléments propres en dimension finie Éléments propres d'un endomorphisme en dimension finie, spectre. Éléments propres d'une matrice carrée.
Polynôme caractéristique. Il est unitaire et de degré n. Coefficients connus *a priori*.
Polynôme caractéristique et valeurs propres. Multiplicité des valeurs propres.
Polynôme caractéristique et sous-espaces stables. Comparaison de la dimension d'un espace propre et de la multiplicité de la valeur propre correspondante.
Rien concernant la réduction pour l'instant.

Exercices et résultats classiques à connaître

203.1

Étudier la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sin u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

203.2

Étudier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\cos u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

203.3

On considère une suite réelle $(u_n)_n$, et on note $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ la moyenne arithmétique de ses premiers termes.

(a) On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Démontrer que la suite $(v_n)_n$ converge vers 0.

(b) On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

(c) Que penser de la réciproque ?

203.4

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

En utilisant le lien suite-série, montrer que $(u_n)_n$ converge.
On note traditionnellement γ sa limite, appelée ***constante d'Euler****, et on a donc établi :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

203.5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin k$.

(a) Montrer que $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

(b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{\sin k}{k}$ converge.

203.6

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

102.1

Déterminer les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

102.2

Soit u et v deux endomorphismes d'un e.v.

(a) Si $\lambda \neq 0$ est valeur propre de $u \circ v$, montrer qu'il l'est aussi de $v \circ u$.

(b) Montrer que cette propriété reste vraie pour $\lambda = 0$ lorsque l'espace E est de dimension finie.

(c) Pour $P \in E = \mathbb{R}[X]$, on pose dans cette question :

$$u(P) = P' \text{ et } v(P) = \int_0^X P(t)\,\mathrm{d}t$$

Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$.

(d) Conclure.

102.3

Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire. On appelle **matrice compagnon** de P la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que P est le polynôme caractéristique de C.

(b) On suppose dans cette question que P est scindé à racines simples, notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Montrer que :

$$C^\top = V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^{-1}$$

où $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ désigne la matrice de Vandermonde de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

102.4

À quelle condition existe-t-il $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + 2A + 5I_n = 0$?

102.5

On considère les matrices réelles :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(a) Calculer $AM - MA$.

(b) Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme :

$$M \mapsto AM - MA$$