102. Valeurs propres, vecteurs propres

Éléments propres d'un endomorphisme Valeurs propres, vecteurs propres. Sous-espaces propres. Propriétés.

Éléments propres en dimension finie Éléments propres d'un endomorphisme en dimension finie, spectre. Éléments propres d'une matrice carrée.
Polynôme caractéristique. Il est unitaire et de degré n. Coefficients connus *a priori*.
Polynôme caractéristique et valeurs propres. Multiplicité des valeurs propres.
Polynôme caractéristique et sous-espaces stables. Comparaison de la dimension d'un espace propre et de la multiplicité de la valeur propre correspondante.
Rien concernant la réduction pour l'instant.

204. Espaces vectoriels normés

Normes Définition d'une norme, distance entre deux vecteurs.
Normes usuelles : normes 1, 2 et ∞ sur $\mathbb{K}^p$. Norme euclidienne.
On n'interroge pas les étudiants sur les produits scalaires avant le chapitre 206.
Exemples de normes dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $\mathbb{K}[X]$.
Normes équivalentes. En dimension finie, deux normes sont équivalentes.
Parties bornées, invariance par changement de norme équivalente, intersection, union finie.
Fonctions bornées, $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$.
On utilise directement $\mathrm{Sup}\{kx, x\in A\} = k\,\mathrm{Sup}(A)$ *lorsque* $k\in\mathbb{R}_+$ *et* $A\neq\varnothing$.

Suites d'éléments d'un evn Suite convergente, limite, $\|u_n-\ell\|\to 0$.
Suite bornée, toute suite convergente est bornée.
Invariance par changement de norme équivalente.
Opération sur les suites convergentes.
Suites extraites. Convergence d'une suite extraite de suite convergente. Convergence d'une suite $(u_n)_n$ lorsque $(u_{2p})_p$ et $(u_{2p+1})_p$ convergent vers la même limite.
Convergence par coordonnées.

Fonctions à valeurs dans un evn : limite et continuité en un point
La définition formelle de ***point adhérent*** *sera vue au chapitre 205.*
Limite en un point, $\|f(x)-\ell\| \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Caractérisation séquentielle.
Indépendance au choix de la norme équivalente.
Fonctions bornées.
Opérations algébriques sur les limites, composition.
Limite par coordonnées.
Continuité en un point.

Fonctions à valeurs dans un evn : continuité sur une partie Définition. Fonctions lipschitziennes. $\|\cdot\|$ est lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.
Fonctions automatiquement continues : en dimension finie, les applications linéaires, les applications polynomiales, les applications multilinéaires.

Exercices et résultats classiques à connaître

102.1

Déterminer les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

102.2

Soit u et v deux endomorphismes d'un e.v.

(a) Si $\lambda \neq 0$ est valeur propre de $u \circ v$, montrer qu'il l'est aussi de $v \circ u$.

(b) Montrer que cette propriété reste vraie pour $\lambda = 0$ lorsque l'espace E est de dimension finie.

(c) Pour $P \in E = \mathbb{R}[X]$, on pose dans cette question :

$$u(P) = P' \text{ et } v(P) = \int_0^X P(t)\,\mathrm{d}t$$

Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$.

(d) Conclure.

102.3

Soit $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire. On appelle **matrice compagnon** de P la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que P est le polynôme caractéristique de C.

(b) On suppose dans cette question que P est scindé à racines simples, notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que :

$$C^\top = V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{-1}$$

où $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ désigne la matrice de Vandermonde de $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

102.4

À quelle condition existe-t-il $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + 2A + 5I_n = 0$?

102.5

On considère les matrices réelles :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(a) Calculer $AM - MA$.

(b) Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme :

$$M \mapsto AM - MA$$

204.1

Sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme.

204.2

Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P) = \operatorname*{Sup}_{t\in[-1,1]} |P(t)|$$

(a) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) On considère la suite de terme général $P_n = \frac{1}{n}X^n$. Est-elle bornée pour la norme N_1 ? pour la norme N_2 ?

(c) Les deux normes sont-elles équivalentes ?

204.3

Soient $E,\ F$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$.

(a) Démontrer que si u est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) u est continue sur E.

(ii) u est continue en 0.

(iii) $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant k\|x\|$.

(b) Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par $\|f\| = \operatorname*{Sup}_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démontrer que φ est linéaire et continue.

204.4

Soit u une application linéaire continue de E dans F, espaces vectoriels non nuls. On définit :

$$M_1 = \operatorname{Sup}\left\{\frac{\|u(x)\|}{\|x\|},\ x \in E \setminus \{0\}\right\}$$
$$M_2 = \operatorname{Sup}\{\|u(x)\|,\ x \in E \text{ t.q. } \|x\| = 1\}$$
$$M_3 = \operatorname{Inf}\{k \geqslant 0 \text{ t.q. } \forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant k\|x\|\}$$

(a) Justifier l'existence de ces nombres.

(b) Montrer que $M_1 = M_2 = M_3$.

Remarque. *On note en général $|||u|||$ ce nombre, et on peut montrer que $|||\cdot|||$ définit sur $\mathcal{L}(E,F)$ une norme. Cette norme s'appelle **la norme subordonnée** à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$, et elle satisfait :*

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leqslant |||u|||\ \|x\|_E$$