102. Valeurs propres, vecteurs propres

Révision de ce chapitre

204. Espaces vectoriels normés

Normes Définition d'une norme, distance entre deux vecteurs.
Normes usuelles : normes 1, 2 et ∞ sur $\mathbb{K}^p$. Norme euclidienne.
On n'interroge pas les étudiants sur les produits scalaires avant le chapitre 206.
Exemples de normes dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $\mathbb{K}[X]$.
Normes équivalentes. En dimension finie, deux normes sont équivalentes.
Parties bornées, invariance par changement de norme équivalente, intersection, union finie.
Fonctions bornées, $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$.
On utilise directement $\operatorname{Sup}\{kx, x\in A\} = k\operatorname{Sup}(A)$ *lorsque* $k\in\mathbb{R}_+$ *et* $A\neq\varnothing$.

Suites d'éléments d'un evn Suite convergente, limite, $\|u_n-\ell\|\to 0$.
Suite bornée, toute suite convergente est bornée.
Invariance par changement de norme équivalente.
Opération sur les suites convergentes.
Suites extraites. Convergence d'une suite extraite de suite convergente. Convergence d'une suite $(u_n)_n$ lorsque $(u_{2p})_p$ et $(u_{2p+1})_p$ convergent vers la même limite.
Convergence par coordonnées.

Fonctions à valeurs dans un evn : limite et continuité en un point
*La définition formelle de **point adhérent** sera vue au chapitre 205.*
Limite en un point, $\|f(x)-\ell\| \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Caractérisation séquentielle.
Indépendance au choix de la norme équivalente.
Fonctions bornées.
Opérations algébriques sur les limites, composition.
Limite par coordonnées.
Continuité en un point.

Fonctions à valeurs dans un evn : continuité sur une partie Définition. Fonctions lipschitziennes. $\|\cdot\|$ est lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.
Fonctions automatiquement continues : en dimension finie, les applications linéaires, les applications polynomiales, les applications multilinéaires.

103. Réduction en dimension finie

Diagonalisation Endomorphisme diagonalisable, matrice diagonalisable.
Caractérisation : il existe une base de vecteurs propres.
Caractérisation : $E = \bigoplus_{\lambda\in\operatorname{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.
Caractérisation : $\dim E = \sum_{\lambda\in\operatorname{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u)$.
Caractérisation : χ_u est scindé et, pour toute valeur propre, $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$.
Application de la diagonalisation :
Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.
Technique d'étude des suites récurrentes linéaires simultanées, des suites récurrentes linéaires à coefficients constants, des systèmes différentiels simples à coefficients constants.

Aux colleurs. *Rien cette semaine concernant le lien entre diagonalisation et polynômes annulateurs. Rien sur la trigonalisation.*

Exercices et résultats classiques à connaître

204.1

Sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme.

204.2

Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P)=\sum_{k=0}^{+\infty}|P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P)=\operatorname*{Sup}_{t\in[-1,1]}|P(t)|$$

(a) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) On considère la suite de terme général $P_n=\frac{1}{n}X^n$. Est-elle bornée pour la norme N_1 ? pour la norme N_2 ?

(c) Les deux normes sont-elles équivalentes ?

204.3

Soient $E,\ F$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$.

(a) Démontrer que si u est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) u est continue sur E.

(ii) u est continue en 0.

(iii) $\exists k>0$ tel que $\forall x\in E,\ \|u(x)\|\leqslant k\|x\|$.

(b) Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par $\|f\|=\operatorname*{Sup}_{x\in[0,1]}|f(x)|$.

On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(f)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démontrer que φ est linéaire et continue.

204.4

Soit u une application linéaire continue de E dans F, espaces vectoriels non nuls. On définit :

$$M_1=\operatorname{Sup}\left\{\frac{\|u(x)\|}{\|x\|},\ x\in E\smallsetminus\{0\}\right\}$$
$$M_2=\operatorname{Sup}\{\|u(x)\|,\ x\in E \text{ t.q. } \|x\|=1\}$$
$$M_3=\operatorname{Inf}\{k\geqslant 0 \text{ t.q. } \forall x\in E,\ \|u(x)\|\leqslant k\|x\|\}$$

(a) Justifier l'existence de ces nombres.

(b) Montrer que $M_1=M_2=M_3$.

Remarque. *On note en général $|||u|||$ ce nombre, et on peut montrer que $|||\cdot|||$ définit sur $\mathcal{L}(E,F)$ une norme. Cette norme s'appelle* **la norme subordonnée** *à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$, et elle satisfait :*

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leqslant |||u|||\ \|x\|_E$$

103.1

Pour les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, calculer le polynôme caractéristique et étudier la diagonalisabilité.

103.2

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1. Montrer qu'il existe deux matrices colonnes U et V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = UV^\top$.

(b) Exprimer A^2 en fonction de A. En déduire les valeurs propres possibles de A.

(c) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr}(A) \neq 0$.

103.3

Dans une espace vectoriel E de dimension finie, on considère deux endomorphismes u et v diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$.

(a) Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u.

(b) Montrer que l'endomorphisme induit de u à un sous-espace propre de v est diagonalisable.

(c) Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u et v.

103.4

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On propose de résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation : $(E)\ :\ X^2 + X = A$.

(a) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

(b) Déterminer les matrices $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Y^2 + Y = D$. On commencera pour cela par montrer qu'une telle matrice Y commute avec D, et par en déduire que c'est une matrice diagonale.

(c) Résoudre alors l'équation (E).