102. Valeurs propres, vecteurs propres

Révision de ce chapitre

103. Réduction en dimension finie

Diagonalisation Endomorphisme diagonalisable, matrice diagonalisable.
Caractérisation : il existe une base de vecteurs propres.
Caractérisation : $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.
Caractérisation : $\dim E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u)$.
Caractérisation : χ_u est scindé et, pour toute valeur propre, $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$.
Application de la diagonalisation :
Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.
Technique d'étude des suites récurrentes linéaires simultanées, des suites récurrentes linéaires à coefficients constants, des systèmes différentiels simples à coefficients constants.

Diagonalisation et polynômes annulateurs Polynôme annulateur et spectre.
Théorème de Cayley-Hamilton.
Caractérisation de diagonalisabilité : il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples, $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} (X - \lambda)$ annule u.
Diagonalisabilité et sous-espaces stables.

La notion de polynôme minimal est hors programme, de même que le lemme de décomposition des noyaux.

Trigonalisation Endomorphisme trigonalisable, matrice trigonalisable.
Caractérisation : χ_u est scindé.
On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension, et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.

Exercices et résultats classiques à connaître

103.1

Pour les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, calculer le polynôme caractéristique et étudier la diagonalisabilité.

103.2

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1. Montrer qu'il existe deux matrices colonnes U et V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = UV^\top$.

(b) Exprimer A^2 en fonction de A. En déduire les valeurs propres possibles de A.

(c) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

103.3

Dans une espace vectoriel E de dimension finie, on considère deux endomorphismes u et v diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$.

(a) Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u.

(b) Montrer que l'endomorphisme induit de u à un sous-espace propre de v est diagonalisable.

(c) Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u et v.

103.4

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On propose de résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation : $(E)\ :\ X^2 + X = A$.

(a) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

(b) Déterminer les matrices $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Y^2 + Y = D$. On commencera pour cela par montrer qu'une telle matrice Y commute avec D, et par en déduire que c'est une matrice diagonale.

(c) Résoudre alors l'équation (E).

103.5

On considère, pour $n \geqslant 2$, la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que la matrice J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

(b) Application : calculer, pour $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$

103.1

Pour les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, calculer le polynôme caractéristique et étudier la diagonalisabilité.

103.2

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1. Montrer qu'il existe deux matrices colonnes U et V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = UV^\top$.

(b) Exprimer A^2 en fonction de A. En déduire les valeurs propres possibles de A.

(c) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

103.3

Dans une espace vectoriel E de dimension finie, on considère deux endomorphismes u et v diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$.

(a) Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u.

(b) Montrer que l'endomorphisme induit de u à un sous-espace propre de v est diagonalisable.

(c) Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u et v.

103.4

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On propose de résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation : $(E)\ :\ X^2 + X = A$.

(a) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

(b) Déterminer les matrices $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Y^2 + Y = D$. On commencera pour cela par montrer qu'une telle matrice Y commute avec D, et par en déduire que c'est une matrice diagonale.

(c) Résoudre alors l'équation (E).