Aux colleurs

Il n'y aura pas de colle la semaine du 12 décembre. Passez de bonnes fêtes de fin d'année.

102. Valeurs propres, vecteurs propres

Révision de ce chapitre

103. Réduction en dimension finie

Diagonalisation Révision

Diagonalisation et polynômes annulateurs Polynôme annulateur et spectre.
Théorème de Cayley-Hamilton.
Caractérisation de diagonalisabilité : il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples, $\prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} (X - \lambda)$ annule u.
Diagonalisabilité et sous-espaces stables.

La notion de polynôme minimal est hors programme, de même que le lemme de décomposition des noyaux.

Trigonalisation Endomorphisme trigonalisable, matrice trigonalisable.
Caractérisation : χ_u est scindé.
On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension, et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.

205. Suites de fonctions

Convergence simple Définition, propriétés, exemples.

Convergence uniforme Définition, interprétation graphique.
La convergence uniforme implique la convergence simple.
Étude pratique pour montrer la convergence uniforme, pour montrer la non-convergence uniforme.
Convergence uniforme sur tout segment. Propriétés, exemples.

Régularité de la limite d'une suite de fonctions
Transfert de continuité par convergence uniforme.
Théorème d'interversion limite-intégrale par convergence uniforme sur un segment.
Intégration sur un intervalle quelconque d'une suite de fonctions, convergence dominée.
Limite uniforme d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Exercices et résultats classiques à connaître

103.5

On considère, pour $n \geqslant 2$, la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que la matrice J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

(b) Application : calculer, pour $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$

205.1

On pose : $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1} \mathrm{e}^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}\, x)$.

(a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$.

(b) La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?

(c) Pour $a > 0$, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?

(d) La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

205.2

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, on pose :

$$f_n(x) = x^n$$

(a) Représenter quelques fonctions f_n.

(b) Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_n$ sur $[0, 1]$.

205.3

On pose : $f_n(x) = (x^2 + 1) \dfrac{n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}}{n + x}$.

(a) Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

(b) Déterminer la limite, pour $n \to +\infty$, de :

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

205.4

Déterminer la limite de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin nt}{nt+t^2}\,\mathrm{d}t$$

205.5

Calculer la limite pour $n \to +\infty$ de

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{\sqrt{n}u}\,\mathrm{d}u$$

205.6

Déterminer un équivalent de :

$$\int_0^{n} \sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x$$