Que 2023 soit une année de réussite pour tous !

205. Suites de fonctions

Convergence simple Définition, propriétés, exemples.

Convergence uniforme Définition, interprétation graphique.
La convergence uniforme implique la convergence simple.
Étude pratique pour montrer la convergence uniforme, pour montrer la non-convergence uniforme.
Convergence uniforme sur tout segment. Propriétés, exemples.

Régularité de la limite d'une suite de fonctions
Transfert de continuité par convergence uniforme.
Théorème d'interversion limite-intégrale par convergence uniforme sur un segment.
Intégration sur un intervalle quelconque d'une suite de fonctions, convergence dominée.
Limite uniforme d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

206. Séries de fonctions

Modes de convergence d'une série de fonctions Convergence simple.
Convergence uniforme.
Convergence normale.
Lien entre les modes de convergence, propriétés, exemples.

Régularité de la somme d'une série de fonctions Continuité de la somme d'une série de fonctions.
Limite de la somme d'une série de fonctions.
Dérivation terme à terme d'une série de fonctions. Extension aux fonctions $\mathcal{C}^k$.

Intégration et séries de fonctions Intégration terme à terme sur un segment.
Interversion somme intégrale pour une intégrale généralisée.
Utilisation de la convergence dominée si le théorème précédent ne s'applique pas.

207. Topologie d'un e.v.n.

Approche séquentielle Fermé, point adhérent (définition séquentielle), adhérence. Partie dense. Propriétés : intersection, réunion finie de fermés. Image réciproque d'un fermé par une application continue. Théorème des bornes atteintes.

Vocabulaire topologique Boule ouverte, boule fermée, sphère. Parties convexes, exemples. Ouvert (défini comme complémentaire d'un fermé), caractérisation par les boules, point intérieur. Propriétés : une boule ouverte (resp. fermée) est un ouvert (resp. un fermé), union, intersection finie d'ouverts. Image réciproque d'un ouvert par une application continue.

Aux colleurs

Pas d'exercice trop technique sur ce chapitre. Face à un exercice de topologie, les étudiants doivent privilégier l'utilisation du résultat « image réciproque d'un ouvert/fermé par une application continue » ou, le cas échéant, revenir à la définition séquentielle d'un fermé.

Exercices et résultats classiques à connaître

205.1

On pose : $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}\,x)$.

(a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$.

(b) La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?

(c) Pour $a>0$, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$?

(d) La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

205.2

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose :

$$f_n(x) = x^n$$

(a) Représenter quelques fonctions f_n.

(b) Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_n$ sur $[0,1]$.

205.3

On pose : $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}$.

(a) Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

(b) Déterminer la limite, pour $n \to +\infty$, de :

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

205.4

Déterminer la limite de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin nt}{nt+t^2}\,\mathrm{d}t$$

205.5

Calculer la limite pour $n \to +\infty$ de

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{\sqrt{n}u}\,\mathrm{d}u$$

205.6

Déterminer un équivalent de :

$$\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x$$

206.1

On définit, lorsque c'est possible : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

Montrer que ζ est une application définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

206.2

Utiliser le théorème d'interversion série/intégrale pour exprimer comme somme d'une série l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

206.3

Utiliser le théorème de convergence dominée pour exprimer comme somme d'une série l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

206.4

(a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n+1}$$

(b) Montrer que f est continue sur $[0, \infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

(c) Déterminer une équation différentielle simple dont f est solution et en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

207.1

On note $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ que l'on munit des deux normes en posant :

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x\in[0,1]} (|f(x)|) \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

On considère $A = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$ et $g\ :\ x \mapsto 1$.

(a) Est-ce que g est adhérent à A pour la norme $\|\cdot\|_\infty$?

(b) Est-ce que g est adhérent à A pour la norme $\|\cdot\|_1$?

207.2

Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

207.3

Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.