Que 2024 soit une année de réussite pour tous !

205. Suites de fonctions

Convergence simple Définition, propriétés, exemples.

Convergence uniforme Définition, interprétation graphique.
La convergence uniforme implique la convergence simple.
Étude pratique pour montrer la convergence uniforme, pour montrer la non-convergence uniforme.
Convergence uniforme sur tout segment. Propriétés, exemples.

Régularité de la limite d'une suite de fonctions
Transfert de continuité par convergence uniforme.
Théorème d'interversion limite-intégrale par convergence uniforme sur un segment.
Intégration sur un intervalle quelconque d'une suite de fonctions, convergence dominée.
Limite uniforme d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

206. Séries de fonctions

Modes de convergence d'une série de fonctions Convergence simple.
Convergence uniforme.
Convergence normale.
Lien entre les modes de convergence, propriétés, exemples.

Régularité de la somme d'une série de fonctions Continuité de la somme d'une série de fonctions.
Limite de la somme d'une série de fonctions.
Dérivation terme à terme d'une série de fonctions. Extension aux fonctions $\mathcal{C}^k$.

Intégration et séries de fonctions Intégration terme à terme sur un segment.
Interversion somme intégrale pour une intégrale généralisée.
Utilisation de la convergence dominée si le théorème précédent ne s'applique pas.

104. Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire Définition, exemples de référence, inégalité de Cauchy-Schwarz, norme euclidienne, identités remarquables.

Orthogonalité Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel, propriétés.

Bases orthonormées d'un espace euclidien Existence de bases orthonormées, coordonnées dans une base orthonormée, notation matricielle.

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie, projection orthgonale sur un sous-espace de dimension finie, distance à un sous-espace de dimension finie, algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Formes linéaires sur un espace euclidien Théorème de représentation des formes linéaires.

Exercices et résultats classiques à connaître

205.1

On pose : $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}\,x)$.

(a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$.

(b) La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?

(c) Pour $a>0$, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$?

(d) La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

205.2

Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1]$, on pose :

$$f_n(x) = x^n$$

(a) Représenter quelques fonctions f_n.

(b) Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_n$ sur $[0,1]$.

205.3

On pose : $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}$.

(a) Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

(b) Déterminer la limite, pour $n\to+\infty$, de :

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

205.4

Déterminer la limite de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin nt}{nt+t^2}\,\mathrm{d}t$$

205.5

Calculer la limite pour $n\to+\infty$ de

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{\sqrt{n}u}\,\mathrm{d}u$$

205.6

Déterminer un équivalent de :

$$\int_0^n \sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x$$

206.1

On définit, lorsque c'est possible : $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

Montrer que ζ est une application définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

206.2

Utiliser le théorème d'interversion série/intégrale pour exprimer comme somme d'une série l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

206.3

Utiliser le théorème de convergence dominée pour exprimer comme somme d'une série l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

206.4

(a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n+1}$$

(b) Montrer que f est continue sur $[0, \infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

(c) Déterminer une équation différentielle simple dont f est solution et en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

206.5

On considère :

$$f \,:\, x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)}$$

(a) Montrer que f est définie sur $]-1, +\infty[$.

(b) Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis un équivalent de f en $+\infty$.

(c) Déterminer la limite de f en -1 à droite.

206.6

Pour $x \in [-1, 1]$, on pose :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

(a) Montrer que g est continue sur $[-1, 1]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$.

(b) Est-ce que g est dérivable en 1 ?

104.1

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par :

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^\top B)$$

(a) Montrer que l'on définit bien un produit scalaire.

(b) Montrer que la base canonique $(E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(c) Vérifier que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.

(d) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$|\operatorname{tr} A| \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\operatorname{tr} A^\top A}$$

et préciser le cas d'égalité.

104.2

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$, où $n \geqslant 1$.

(a) Vérifier que :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

définit un produit scalaire sur E.
On note $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ la base obtenue par orthonormalisation de la base $(1, X, \ldots, X^n)$.

(b) Pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, on définit :

$$f_k(X) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}X^k}((X^2-1)^k)$$

b1. Déterminer le degré de f_k.

b2. Calculer $\langle X^i, f_k\rangle$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ et $i \in \{0, \ldots, k-1\}$.

b3. En déduire que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, il existe un λ_k tel que $f_k = \lambda_k e_k$.

104.3

Pour $k \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0, 1\}$, calculer :

$$m_k = \operatorname*{Inf}_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (t^k - at - b)^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

104.4

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour $(u_1, \ldots, u_p)$ famille de vecteurs de E, on note $G(u_1, \ldots, u_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'indice i, j est $\langle u_i | u_j\rangle$.

(a) Montrer que la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est liée si et seulement si $\det G(u_1, \ldots, u_p) = 0$

(b) Montrer que, si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base d'un sous-espace vectoriel F de E, alors, pour tout $x \in E$:

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(e_1, \ldots, e_p, x)}{\det G(e_1, \ldots, e_p)}}$$