Que 2023 soit une année de réussite pour tous !

206. Séries de fonctions

Modes de convergence d'une série de fonctions Convergence simple.
Convergence uniforme.
Convergence normale.
Lien entre les modes de convergence, propriétés, exemples.

Régularité de la somme d'une série de fonctions Continuité de la somme d'une série de fonctions.
Limite de la somme d'une série de fonctions.
Dérivation terme à terme d'une série de fonctions. Extension aux fonctions $\mathcal{C}^k$.

Intégration et séries de fonctions Intégration terme à terme sur un segment.
Interversion somme intégrale pour une intégrale généralisée.
Utilisation de la convergence dominée si le théorème précédent ne s'applique pas.

207. Topologie d'un e.v.n.

Approche séquentielle Fermé, point adhérent (définition séquentielle), adhérence. Partie dense. Propriétés : intersection, réunion finie de fermés. Image réciproque d'un fermé par une application continue. Théorème des bornes atteintes.

Vocabulaire topologique Boule ouverte, boule fermée, sphère. Parties convexes, exemples. Ouvert (défini comme complémentaire d'un fermé), caractérisation par les boules, point intérieur. Propriétés : une boule ouverte (resp. fermée) est un ouvert (resp. un fermé), union, intersection finie d'ouverts. Image réciproque d'un ouvert par une application continue.

Aux colleurs

Pas d'exercice trop technique sur ce chapitre. Face à un exercice de topologie, les étudiants doivent privilégier l'utilisation du résultat « image réciproque d'un ouvert/fermé par une application continue » ou, le cas échéant, revenir à la définition séquentielle d'un fermé.

208. Séries entières

Rayon de convergence Définition d'une série entière.
Lemme d'Abel, rayon de convergence, disque/intervalle ouvert de convergence, cercle d'incertitude.
Détermination pratique du rayon de convergence (on n'a pas recours systématiquement à la règle de d'Alembert !).

Opérations sur les séries entières Loi externe, somme, produit de Cauchy.

Régularité de la somme Convergence normale sur tout segment de $]-R, R[$.
Continuité de la somme, pas de résultat général au bord de l'intervalle ouvert de convergence : utilisation des théorèmes du chap. 206.
Primitives et intégrales.
Dérivabilité et classe $\mathcal{C}^\infty$ de la somme. Unicité des coefficients.

Développement en série entière d'une fonction d'une variable réelle Fonction développable en série entière, unicité sous réserve d'existence, cas des fonctions paires et impaires.

Opérations sur les fonctions développables en SE.

Formulaire des DSE : e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, $\operatorname{Arctan} x$.
Utilisation d'une équation différentielle.
Calcul de la somme d'une série entière.
Série de Taylor d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Si la fonction est développable en série entière, son DSE est sa série de Taylor, mais la réciproque est fausse.

Utilisation de la formule de Taylor avec reste-intégral.

Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe Série géométrique.
Série exponentielle. Cohérence de la définition avec les propriétés usuelles et la notation exponentielle.

Exercices et résultats classiques à connaître

206.1

On définit, lorsque c'est possible : $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$
Montrer que ζ est une application définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

206.2

Utiliser le théorème d'interversion série/intégrale pour exprimer comme somme d'une série l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1} \,\mathrm{d}t$$

206.3

Utiliser le théorème de convergence dominée pour exprimer comme somme d'une série l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1} \,\mathrm{d}t$$

206.4

(a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n+1}$$

(b) Montrer que f est continue sur $[0, \infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

(c) Déterminer une équation différentielle simple dont f est solution et en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

207.1

On note $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ que l'on munit des deux normes en posant :

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x\in[0,1]} (|f(x)|) \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

On considère $A = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$ et $g\ :\ x \mapsto 1$.

(a) Est-ce que g est adhérent à A pour la norme $\|\cdot\|_\infty$?

(b) Est-ce que g est adhérent à A pour la norme $\|\cdot\|_1$?

207.2

Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

207.3

Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

208.1

Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)3^n}$.

208.2

Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

208.3

Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ en prolongeant par continuité l'égalité valable sur $]-1,1[$:

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$$

208.4

Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ en utilisant la formule :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n \mathrm{d}t$$

208.5

Développer $\operatorname{Arccos} x$ en série entière.

208.6

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

(b) Rappeler sans démonstration le DSE de $x \mapsto \operatorname{ch} x$.

(c) c1. Déterminer $S(x)$.

c2. On considère la fonction : $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \operatorname{ch}\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ \cos\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$

Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

208.7

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\tan^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}$$

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan^{(n)}(x) \geqslant 0$.

(c) Montrer que la série de Taylor de la fonction tangente converge sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(d) En désignant par S la somme de la série de Taylor, montrer que $S' = 1 + S^2$.
Montrer ensuite que $S = \tan$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.