208. Séries entières

Rayon de convergence Définition d'une série entière.
Lemme d'Abel, rayon de convergence, disque/intervalle ouvert de convergence, cercle d'incertitude.
Détermination pratique du rayon de convergence (on n'a pas recours systématiquement à la règle de d'Alembert !).

Opérations sur les séries entières Loi externe, somme, produit de Cauchy.

Régularité de la somme Convergence normale sur tout segment de $]-R,R[$.
Continuité de la somme, pas de résultat général au bord de l'intervalle ouvert de convergence : utilisation des théorèmes du chap. 206.
Primitives et intégrales.
Dérivabilité et classe $\mathcal{C}^\infty$ de la somme. Unicité des coefficients.

Développement en série entière d'une fonction d'une variable réelle Fonction développable en série entière, unicité sous réserve d'existence, cas des fonctions paires et impaires.

Opérations sur les fonctions développables en SE.

Formulaire des DSE : e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, $\operatorname{Arctan} x$.
Utilisation d'une équation différentielle.
Calcul de la somme d'une série entière.
Série de Taylor d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Si la fonction est développable en série entière, son DSE est sa série de Taylor, mais la réciproque est fausse.

Utilisation de la formule de Taylor avec reste-intégral.

Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe Série géométrique.
Série exponentielle. Cohérence de la définition avec les propriétés usuelles et la notation exponentielle.

301. Espaces probabilisés

Vocabulaire probabiliste Univers, épreuve ou issue, un événement est une collection d'épreuves, contraire, événements disjoints, système complet d'événements.

Probabilité Définition, propriétés, continuité monotone, cas de la suite des intersections ou unions partielles. Événement presque sûr, négligeable. Système quasi-complet d'événements.

Conditionnement Probabilité conditionnelle
Probabilités composées.
Probabilités totales.
Formule de Bayes.

Indépendance Indépendance de deux événements, indépendance d'une famille finie d'événements.

Annexes Dénombrabilité, sommabilité, tribu. Ces notions ne font l'objet d'aucune évaluation.

Exercices et résultats classiques à connaître

208.1

Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)3^n}$.

208.2

Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

208.3

Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ en prolongeant par continuité l'égalité valable sur $]-1, 1[$:

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$$

208.4

Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ en utilisant la formule :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n \mathrm{d}t$$

208.5

Développer $\operatorname{Arccos} x$ en série entière.

208.6

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

(b) Rappeler sans démonstration le DSE de $x \mapsto \operatorname{ch} x$.

(c) c1. Déterminer $S(x)$.

c2. On considère la fonction : $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \operatorname{ch}\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ \cos\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$

Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

208.7

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\tan^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}$$

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan^{(n)}(x) \geqslant 0$.

(c) Montrer que la série de Taylor de la fonction tangente converge sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(d) En désignant par S la somme de la série de Taylor, montrer que $S' = 1 + S^2$.
Montrer ensuite que $S = \tan$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.