301. Espaces probabilisés

Révision

302. Variables aléatoires discrètes, le début

Révision

303. Variables aléatoires discrètes, la suite

Espérance Définition, exemples, cas des lois usuelles, espérance d'une v.a. constante, de deux v.a. qui suivent la même loi. Pour X à valeurs entières, $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$. Formule de transfert, linéarité, positivité, croissance. Si $|X| \leqslant Y$ et Y d'espérance finie, alors X aussi. Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X = 0)$ est presque-sûr. Pour X et Y indépendantes, $E(XY)$.

Variance Si X^2 est d'espérance finie, X aussi. $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$. Effet d'une translation, d'une dilatation de X. Pour X, Y indépendantes, $V(X + Y)$. Variances des lois usuelles.

Inégalités de Марков et de Bienaymé- Чебышёв.

Covariance Inégalité de Cauchy-Schwarz. $\mathrm{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Si X et Y sont indépendante, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, et la réciproque est fausse. Règles de calcul avec la covariance.

Fonctions génératrices Définition, $E(t^X)$. La fonction génératrice caractérise la loi de la v.a. Fonctions génératrices des lois usuelles. Continuité de G_X. Existences simultanées et relations $G'_X(1) = E(X)$ et $G''_x(1) = E(X(X - 1))$. Fonctions génératrices d'une somme de v.a. indépendantes.

Loi faible des grands nombres Pour $(X_n)_n$ suite i.i.d. admettant une variance σ^2 et une espérance m :

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

104. Espaces préhilbertiens réels (début)

Produit scalaire Définition, exemples de référence, inégalité de Cauchy-Schwarz, norme euclidienne, identités remarquables.

Exercices et résultats classiques à connaître

303.1

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_n = \dfrac{\alpha}{n2^n}$.

(a) Déterminer α pour que la famille $(n, p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X.

(b) X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

(c) Quelle est l'espérance de la variable aléatoire $Y = (\ln 2)X - 1$?

303.2

Soit $\lambda > 0$ et X un variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \frac{\lambda}{n} P(X = n - 1)$$

(a) Déterminer la loi de X.

(b) Déterminer l'espérance de $Y = \dfrac{1}{X+1}$.

303.3

On lance une pièce amenant pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$, jusqu'à l'obtention de deux piles au total. On note X le nombre de faces alors obtenues.
Si $X = n$, on met $n + 1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire une boule au hasard. On note Y le numéro de la boule obtenue.

(a) Déterminer la loi de X. Calculer $\mathrm{E}(X)$.

(b) Déterminer la loi du couple (X, Y), et en déduire la loi de Y. Calculer $\mathrm{E}(Y)$.

(c) On définit la variable aléatoire $Z = X - Y$. Montrer que Y et Z sont indépendantes.

303.4

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Soit N une autre variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante des X_i. On s'intéresse à :

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

On note qu'ici le nombre de termes dans la somme est la variable aléatoire N.

(a) Qu'est-il raisonnable de conjecturer quant à la valeur de $E(S)$?

(b) Justifier que S est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(c) Montrer que, pour $t \in [-1, 1]$:

$$G_S(t) = G_N(G_X(t))$$

On admettra sans justification les interversions de sommes utilisées.

(d) On suppose que N et X sont d'espérance finie. Établir :

$$E(S) = E(N)E(X)$$

(e) On lance une pièce honnête. Tant que l'on obtient « pile », on lance un dé et on avance son pion du nombre de cases correspondantes. De combien de case avance le pion en moyenne ?