104. Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire Définition, exemples de référence, inégalité de Cauchy-Schwarz, norme euclidienne, identités remarquables.

Orthogonalité Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel, propriétés.

Bases orthonormées d'un espace euclidien Existence de bases orthonormées, coordonnées dans une base orthonormée, notation matricielle.

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie, projection orthgonale sur un sous-espace de dimension finie, distance à un sous-espace de dimension finie, algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Formes linéaires sur un espace euclidien Théorème de représentation des formes linéaires.

209. Intégrales à paramètre

Continuité Théorème de continuité des intégrales à paramètre. Version avec domination locale. Utilisation de la caractérisation séquentielle et du théorème de convergence dominée pour étudier une limite.

Dérivation Théorème de classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètre. Version avec domination locale. Extension à la classe $\mathcal{C}^k$.

Exercices et résultats classiques à connaître

104.1

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par :

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^\top B)$$

(a) Montrer que l'on définit bien un produit scalaire.

(b) Montrer que la base canonique $(E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(c) Vérifier que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.

(d) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$|\operatorname{tr} A| \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\operatorname{tr} A^\top A}$$

et préciser le cas d'égalité.

104.2

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$, où $n \geqslant 1$.

(a) Vérifier que :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

définit un produit scalaire sur E.
On note $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ la base obtenue par orthonormalisation de la base $(1, X, \dots, X^n)$.

(b) Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, on définit :

$$f_k(X) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}X^k}((X^2-1)^k)$$

b1. Déterminer le degré de f_k.

b2. Calculer $\langle X^i, f_k\rangle$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$ et $i \in \{0, \dots, k-1\}$.

b3. En déduire que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, il existe un λ_k tel que $f_k = \lambda_k e_k$.

104.3

Pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, calculer :

$$m_k = \operatorname*{Inf}_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (t^k - at - b)^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

104.4

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour $(u_1, \dots, u_p)$ famille de vecteurs de E, on note $G(u_1, \dots, u_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'indice i, j est $\langle u_i | u_j\rangle$.

(a) Montrer que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est liée si et seulement si $\det G(u_1, \dots, u_p) = 0$

(b) Montrer que, si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base d'un sous-espace vectoriel F de E, alors, pour tout $x \in E$:

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(e_1, \dots, e_p, x)}{\det G(e_1, \dots, e_p)}}$$

209.1

Montrer que $\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t^2}\mathrm{d}t \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et déterminer sa limite en $+\infty$.

209.2

On pose, pour tout x de $]0, +\infty[$ et pour tout t de $]0, +\infty[$:

$$f(x, t) = \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$$

(a) Démontrer que la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On pose, pour $x \in]0, +\infty[$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$$

(b) Démontrer que, pour tout x de $]0, +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(c) Démontrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

209.3

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{e}^{-xt} \mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f est définie sur $[0, +\infty[$.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Expliciter $f'(x)$ et en déduire une expression simple de $f(x)$ sur $]0, +\infty[$.

(c) On admet que f est continue en 0. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$

(d) *Question difficile facultative :* Démontrer que f est continue en 0.

209.4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $t \mapsto tf(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt} f(t) \mathrm{d}t$$

La fonction g est appelée la **transformée de Fourier de** f.
Montrer que g est une application de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.

209.5

Pour f continue sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles, on définit sous réserve d'existence :

$$\mathcal{L}\{f\} \ : \ s \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\, \mathrm{d}t$$

appelée **transformée de Laplace** de f.
On suppose dorénavant que :

$$\exists k \in \mathbb{N}^*,\ f(t) = \underset{t \to +\infty}{\mathrm{o}}(t^k) \qquad (H)$$

et on note $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$.

(a) Montrer que F est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

(b) Exploiter la caractéristation séquentielle de la limite et le théorème de convergence dominée pour montrer que $F(s) \xrightarrow[s \to +\infty]{} 0$.

(c) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall s > 0,\ F'(s) = -\mathcal{L}\{tf(t)\}$$

209.6

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $f, g \in E$, on pose :

$$(f \star g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) g(t)\, \mathrm{d}t$$

que l'on appelle **produit de convolution** de f et g.

(a) Montrer que $\star$ est une loi de composition interne commutative sur E.

(b) Majorer $\|f \star g\|_\infty$ à l'aide de $\|f\|_\infty$ et $\|g\|_\infty$.

(c) Calculer $f \star g$ lorsque $f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}pt}$ et $g(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}qt}$, où $p, q \in \mathbb{Z}$.