301. Espaces probabilisés

Vocabulaire probabiliste Univers, épreuve ou issue, un événement est une collection d'épreuves, contraire, événements disjoints, système complet d'événements.

Probabilité Définition, propriétés, continuité monotone, cas de la suite des intersections ou unions partielles. Événement presque sûr, négligeable. Système quasi-complet d'événements.

Conditionnement Probabilité conditionnelle
Probabilités composées.
Probabilités totales.
Formule de Bayes.

Indépendance Indépendance de deux événements, indépendance d'une famille finie d'événements.

Annexes Dénombrabilité, sommabilité, tribu. Ces notions ne font l'objet d'aucune évaluation.

302. Variables aléatoires discrètes, le début

Qu'importe l'épreuve, pourvu qu'on ait le résultat Définition, $(X = x)$ est un événement, fonction indicatrice. Loi d'une v.a., propriétés. Fonction d'une v.a. Si $X \sim Y$ alors $f(Y) \sim f(Y)$.

Lois usuelles Loi et situation-type pour les variables uniforme, de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson. La somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre est une variable binomiale.

Couples de variables aléatoires Loi conjointe, lois marginales. Détermination pratique des lois marginales.

Indépendance Indépendance de deux v.a., d'une famille de v.a. Variables i.i.d. Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$. Lemme des coalitions.

Annexes La loi d'une v.a. définit une probabilité. Un couple de v.a. est une v.a. La loi conditionnelle est une probabilité. Simuler une v.a. avec Python. Ces notions ne font l'objet d'aucune évaluation.

Exercices et résultats classiques à connaître

301.1

Vous jouez à Pile ou Face dans un club de jeu dont environ un membre sur trois est un tricheur. Votre adversaire parie sur Pile, lance la pièce et obtient Pile. Quelle est la probabilité qu'il soit un tricheur ?

301.2

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire successivement des boules de cette urne. À chaque boule tirée, on note la couleur de celle-ci, et on la remet dans l'urne accompagnée d'une boule de la même couleur. Montrer qu'il est presque sûr que la boule rouge initiale sera tirée.

301.3

Une urne contient une boule rouge. Un joueur lance un dé équilibré. S'il obtient ⚅, il tire une boule dans l'urne. Sinon, il rajoute une boule blanche dans l'urne et répète la manipulation. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?

301.4

On effectue une suite de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par p_k la probabilité qu'au cours des k premiers lancers, le résultat Pile n'ait pas été obtenu deux fois de suite.

(a) Calculer p_1, p_2, p_3. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 3$, on a

$$p_k = \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{4}p_{k-2}$$

Dans la suite, on pose $p_0 = 1$. Est-ce cohérent ?

(b) Donner l'expression de p_k en fonction de k.

(c) En déduire la convergence et la limite de la suite (p_k). Interpréter du résultat obtenu.

301.5

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A,B et C.
A l'instant t=0, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On note A_n l'événement « l'animal est en A après son n-ième trajet ».
On note B_n l'événement « l'animal est en B après son n-ième trajet ».
On note C_n l'événement « l'animal est en C après son n-ième trajet ».
On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

(a) a1. Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
a2. Exprimer de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

(b) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

b1. Justifier, sans calculs, que la matrice A est diagonalisable.

b2. Diagonaliser A.

(c) Montrer comment les résultats de la question 2 peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

301.6

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche ».
On pose également $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = P(B_n)$.

(a) Calculer p_1.

(b) Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.

(c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

301.7

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements aléatoires. On s'intéresse à :

$$\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant N} A_n$$

(a) Pourquoi s'agit-il d'un événement ?

(b) Comment interpréter $\omega \in \displaystyle\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant N} A_n$?

(c) Montrer que si $\sum\limits_{n\geqslant 0} P(A_n) < +\infty$, alors $P\left(\displaystyle\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant N} A_n\right) = 0$.

(d) *Question plus difficile, non exigible en colle.*

Montrer que si $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} P(A_n) = +\infty$, et si les A_n sont indépendants, alors $P\left(\displaystyle\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant N} A_n\right) = 1$.

(e) Comment interpréter le résultat de la question précédente ?

302.1

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la loi géométrique de même paramètre p, avec $p \in]0,1[$.

(a) Déterminer les lois de $\mathrm{Max}\,(X,Y)$ et $\mathrm{Min}\,(X,Y)$.

(b) Que représentent $\mathrm{Min}\,(X,Y)$?

(c) Calculer la probabilité $P(X = Y)$.

302.2

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
On suppose que celles-ci suivent une même loi géométrique de paramètre p.
Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

302.3

Soit X et Y deux v.a. indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q. Quelle est la probabilité que la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable ?

302.4

Soit une urne contenant une boule blanche et une boule rouge. On dispose par ailleurs d'une réserve suffisante de boules blanches et rouges, et on répète n fois l'action suivante :
on tire une boule dans l'urne. Si cette boule est blanche (respectivement rouge), on la remet dans l'urne, et on rajoute une boule blanche (respectivement rouge) dans l'urne.
On désigne par X_n la variable aléatoire « nombre de boules blanches dans l'urne » après ces n tirages.
Quelle est la loi de X_n ?
Indication : examiner les petites valeurs de n peut donner des idées.

302.5

On considère un couple de v.a. (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, tel que, avec $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2,\ P(X = p, Y = q) = \alpha \frac{p^q}{\mathrm{e}^{2p} q!}$$

(a) Quelle valeur donner à α pour que (X, Y) suive une loi de probabilité ?

(b) Déterminer la loi de X.

(c) Calculer $P(Y = 0)$, $P(Y = 1)$ et $P(Y = 2)$.

302.6

On désigne par N le nombre d'électrons émis par un élément chimique pendant une période T. On suppose que $N \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Chaque électron a une probabilité $p \in]0, 1[$ d'avoir un effet biologique (on dit dans ce cas qu'il est efficace). On désigne par X le nombre d'électrons efficaces émis pendant une période T.

(a) Donner la loi de X conditionnée par $(N = j)$.

(b) Donner la loi conjointe de (X, N).

(c) Déterminer la loi de X, et la reconnaître.