301. Espaces probabilisés

Vocabulaire probabiliste Univers, épreuve ou issue, un événement est une collection d'épreuves, contraire, événements disjoints, système complet d'événements.

Probabilité Définition, propriétés, continuité monotone, cas de la suite des intersections ou unions partielles. Événement presque sûr, négligeable. Système quasi-complet d'événements.

Conditionnement Probabilité conditionnelle
Probabilités composées.
Probabilités totales.
Formule de Bayes.

Indépendance Indépendance de deux événements, indépendance d'une famille finie d'événements.

Annexes Dénombrabilité, sommabilité, tribu. Ces notions ne font l'objet d'aucune évaluation.

302. Variables aléatoires discrètes, le début

Qu'importe l'épreuve, pourvu qu'on ait le résultat Définition, $(X = x)$ est un événement, fonction indicatrice. Loi d'une v.a., propriétés. Fonction d'une v.a. Si $X \sim Y$ alors $f(Y) \sim f(Y)$.

Lois usuelles Loi et situation-type pour les variables uniforme, de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson. La somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre est une variable binomiale.

Couples de variables aléatoires Loi conjointe, lois marginales. Détermination pratique des lois marginales.

Indépendance Indépendance de deux v.a., d'une famille de v.a. Variables i.i.d. Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$. Lemme des coalitions.

Annexes La loi d'une v.a. définit une probabilité. Un couple de v.a. est une v.a. La loi conditionnelle est une probabilité. Simuler une v.a. avec Python. Ces notions ne font l'objet d'aucune évaluation.

303. Variables aléatoires discrètes, la suite

Espérance Définition, exemples, cas des lois usuelles, espérance d'une v.a. constante, de deux v.a. qui suivent la même loi. Pour X à valeurs entières, $E(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$. Formule de transfert, linéarité, positivité, croissance. Si $|X| \leqslant Y$ et Y d'espérance finie, alors X aussi. Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X = 0)$ est presque-sûr. Pour X et Y indépendantes, $E(XY)$.

Variance Si X^2 est d'espérance finie, X aussi. $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$. Effet d'une translation, d'une dilatation de X. Pour X, Y indépendantes, $V(X + Y)$. Variances des lois usuelles.

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

Covariance Inégalité de Cauchy-Schwarz. $\mathrm{Cov}(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Si X et Y sont indépendante, $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, et la réciproque est fausse. Règles de calcul avec la covariance.

Fonctions génératrices Définition, $E(t^X)$. La fonction génératrice caractérise la loi de la v.a. Fonctions génératrices des lois usuelles. Continuité de G_X. Existences simultanées et relations $G'_X(1) = E(X)$ et $G''_x(1) = E(X(X-1))$. Fonctions génératrices d'une somme de v.a. indépendantes.

Loi faible des grands nombres Pour $(X_n)_n$ suite i.i.d. admettant une variance σ^2 et une espérance m :

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Exercices et résultats classiques à connaître

302.1

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la loi géométrique de même paramètre p, avec $p \in]0,1[$.

(a) Déterminer les lois de $\mathrm{Max}\,(X,Y)$ et $\mathrm{Min}\,(X,Y)$.

(b) Que représentent $\mathrm{Min}\,(X,Y)$?

(c) Calculer la probabilité $P(X = Y)$.

302.2

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
On suppose que celles-ci suivent une même loi géométrique de paramètre p.
Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

302.3

Soit X et Y deux v.a. indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q.
Quelle est la probabilité que la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable ?

302.4

Soit une urne contenant une boule blanche et une boule rouge. On dispose par ailleurs d'une réserve suffisante de boules blanches et rouges, et on répète n fois l'action suivante :
on tire une boule dans l'urne. Si cette boule est blanche (respectivement rouge), on la remet dans l'urne, et on rajoute une boule blanche (respectivement rouge) dans l'urne.
On désigne par X_n la variable aléatoire « nombre de boules blanches dans l'urne » après ces n tirages.
Quelle est la loi de X_n ?
Indication : examiner les petites valeurs de n peut donner des idées.

302.5

On considère un couple de v.a. (X,Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, tel que, avec $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ P(X = p, Y = q) = \alpha \frac{p^q}{\mathrm{e}^{2p} q!}$$

(a) Quelle valeur donner à α pour que (X,Y) suive une loi de probabilité ?

(b) Déterminer la loi de X.

(c) Calculer $P(Y=0)$, $P(Y=1)$ et $P(Y=2)$.

302.6

On désigne par N le nombre d'électrons émis par un élément chimique pendant une période T. On suppose que $N \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Chaque électron a une probabilité $p \in]0,1[$ d'avoir un effet biologique (on dit dans ce cas qu'il est efficace). On désigne par X le nombre d'électrons efficaces émis pendant une période T.

(a) Donner la loi de X conditionnée par $(N=j)$.

(b) Donner la loi conjointe de (X,N).

(c) Déterminer la loi de X, et la reconnaître.

303.1

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_n = \dfrac{\alpha}{n2^n}$.

(a) Déterminer α pour que la famille $(n,p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X.

(b) X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

(c) Quelle est l'espérance de la variable aléatoire $Y=(\ln 2)X-1$?

303.2

Soit $\lambda>0$ et X un variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n)=\frac{\lambda}{n}P(X=n-1)$$

(a) Déterminer la loi de X.

(b) Déterminer l'espérance de $Y=\dfrac{1}{X+1}$.

303.3

On lance une pièce amenant pile avec la probabilité p $(0<p<1)$, jusqu'à l'obtention de deux piles au total. On note X le nombre de faces alors obtenues.
Si $X=n$, on met $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire une boule au hasard. On note Y le numéro de la boule obtenue.

(a) Déterminer la loi de X. Calculer $\mathrm{E}(X)$.

(b) Déterminer la loi du couple (X,Y), et en déduire la loi de Y. Calculer $\mathrm{E}(Y)$.

(c) On définit la variable aléatoire $Z=X-Y$. Montrer que Y et Z sont indépendantes.

303.4

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Soit N une autre variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante des X_i. On s'intéresse à :

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

On note qu'ici le nombre de termes dans la somme est la variable aléatoire N.

(a) Qu'est-il raisonnable de conjecturer quant à la valeur de $E(S)$?

(b) Justifier que S est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(c) Montrer que, pour $t \in [-1, 1]$:

$$G_S(t) = G_N(G_X(t))$$

(d) On suppose que N et X sont d'espérance finie. Établir :

$$E(S) = E(N)E(X)$$

(e) On lance une pièce honnête. Tant que l'on obtient « pile », on lance un dé et on avance son pion du nombre de cases correspondantes. De combien de case avance le pion en moyenne ?