104. Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire Définition, exemples de référence, inégalité de Cauchy-Schwarz, norme euclidienne, identités remarquables.

Orthogonalité Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel, propriétés.

Bases orthonormées d'un espace euclidien Existence de bases orthonormées, coordonnées dans une base orthonormée, notation matricielle.

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie, projection orthgonale sur un sous-espace de dimension finie, distance à un sous-espace de dimension finie, algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Formes linéaires sur un espace euclidien Théorème de représentation des formes linéaires.

209. Intégrales à paramètre

Continuité Théorème de continuité des intégrales à paramètre. Version avec domination locale. Utilisation de la caractérisation séquentielle et du théorème de convergence dominée pour étudier une limite.

Dérivation Théorème de classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètre. Version avec domination locale. Extension à la classe $\mathcal{C}^k$.

105. Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens (début)

Isométries vectorielles et matrices orthogonales Isométries vectorielles : définition, caractérisation, propriétés, groupe orthogonal, spectre, si F est stables par u isométrie vectorielle, alors $F^\perp$ aussi.
Matrices orthogonales : définition, caractérisations, lien avec les isométries vectorielles, changement de base orthonormale, déterminant, groupe spécial orthogonal.
Orientation d'un espace euclidien. Produit mixte dans l'espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3, produit vectoriel dans l'espace euclidien orienté de dimension 3, orientation d'une droite, d'un plan.
Étude des isométries vectorielles du plan euclidien.
Étude des isométries vectorielles directes de l'espace euclidien de dimension 3.

Exercices et résultats classiques à connaître

104.1

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par :

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B)$$

(a) Montrer que l'on définit bien un produit scalaire.

(b) Montrer que la base canonique $(E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(c) Vérifier que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.

(d) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$|\operatorname{tr} A| \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\operatorname{tr} A^\top A}$$

et préciser le cas d'égalité.

104.2

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$, où $n \geqslant 1$.

(a) Vérifier que :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

définit un produit scalaire sur E.
On note $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ la base obtenue par orthonormalisation de la base $(1, X, \dots, X^n)$.

(b) Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, on définit :

$$f_k(X) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}X^k}((X^2-1)^k)$$

b1. Déterminer le degré de f_k.

b2. Calculer $\langle X^i, f_k\rangle$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$ et $i \in \{0, \dots, k-1\}$.

b3. En déduire que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, il existe un λ_k tel que $f_k = \lambda_k e_k$.

104.3

Pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, calculer :

$$m_k = \operatorname*{Inf}_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (t^k - at - b)^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

104.4

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour $(u_1, \dots, u_p)$ famille de vecteurs de E, on note $G(u_1, \dots, u_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'indice i, j est $\langle u_i | u_j\rangle$.

(a) Montrer que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est liée si et seulement si $\det G(u_1, \dots, u_p) = 0$

(b) Montrer que, si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base d'un sous-espace vectoriel F de E, alors, pour tout $x \in E$:

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(e_1, \dots, e_p, x)}{\det G(e_1, \dots, e_p)}}$$

209.1

Montrer que $\begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t^2}\mathrm{d}t \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et déterminer sa limite en $+\infty$.

209.2

On pose, pour tout x de $]0, +\infty[$ et pour tout t de $]0, +\infty[$:

$$f(x, t) = \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$$

(a) Démontrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On pose, pour $x \in]0,+\infty[$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$$

(b) Démontrer que, pour tout x de $]0,+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(c) Démontrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

209.3

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{e}^{-xt} \mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f est définie sur $[0,+\infty[$.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Expliciter $f'(x)$ et en déduire une expression simple de $f(x)$ sur $]0,+\infty[$.

(c) On admet que f est continue en 0. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$

(d) *Question difficile facultative :* Démontrer que f est continue en 0.

209.4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $t \mapsto tf(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt} f(t) \mathrm{d}t$$

La fonction g est appelée la **transformée de Fourier de** f.
Montrer que g est une application de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.

209.5

Pour f continue sur $[0,+\infty[$, à valeurs réelles, on définit sous réserve d'existence :

$$\mathcal{L}\{f\} \; : \; s \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t$$

appelée **transformée de Laplace** de f.
On suppose dorénavant que :

$$\exists k \in \mathbb{N}^*, \; f(t) = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}(t^k) \qquad (H)$$

et on note $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$.

(a) Montrer que F est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

(b) Exploiter la caractéristation séquentielle de la limite et le théorème de convergence dominée pour montrer que $F(s) \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0$.

(c) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et :

$$\forall s > 0, \; F'(s) = -\mathcal{L}\{tf(t)\}$$

209.6

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $f, g \in E$, on pose :

$$(f \star g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

que l'on appelle **produit de convolution** de f et g.

(a) Montrer que $\star$ est une loi de composition interne commutative sur E.

(b) Majorer $\|f \star g\|_\infty$ à l'aide de $\|f\|_\infty$ et $\|g\|_\infty$.

(c) Calculer $f \star g$ lorsque $f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}pt}$ et $g(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}qt}$, où $p, q \in \mathbb{Z}$.