Aux colleurs

Il s'agit pour nous de l'avant-dernière colle de l'année.

105. Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens

Isométries vectorielles et matrices orthogonales Isométries vectorielles : définition, caractérisation, propriétés, groupe orthogonal, spectre, si F est stables par u isométrie vectorielle, alors $F^{\perp}$ aussi.
Matrices orthogonales : définition, caractérisations, lien avec les isométries vectorielles, changement de base orthonormale, déterminant, groupe spécial orthogonal.
Orientation d'un espace euclidien. Produit mixte dans l'espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3, produit vectoriel dans l'espace euclidien orienté de dimension 3, orientation d'une droite, d'un plan.
Étude des isométries vectorielles du plan euclidien.
Étude des isométries vectorielles directes de l'espace euclidien de dimension 3.

Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques réelles Endomorphismes autoadjoints, exemples, caractérisation par la matrice en base orthonormée.
Le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$. Si F est stable par u autoadjoint, alors $F^{\perp}$ aussi. Les sous-espaces propres de u sont en somme directe orthogonale.
Théorème spectral pour les endomorphismes autoadjoints, pour les matrices symétriques réelles.
Endomorphismes autoadjoints (resp. matrices symétriques réelles) positifs, définis-positifs : définition et caractérisation spectrale.

210. Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

Équations différentielles linéaires d'ordre 2 Définition, équation homogène associée, importance de travailler sur un intervalle où les coefficients sont continus et l'équation normalisable, structure et dimension de l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de (E_0). Avec $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E) et y_1 une solution particulière de (E), on a $\mathcal{S} = y_1 + \mathcal{S}_0$. Théorème de Cauchy-linéaire.

Remarque Le programme officiel indique que « la résolution explicite de l'équation différentielle doit comporter des indications. »

Compléments Raccordement des solutions, détermination de solutions particulières polynomiales, développables en série entière.

Révision de première année Résolution des équation différentielles linéaires d'ordre 1, variation de la constante. Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

Exercices et résultats classiques à connaître

105.1

Soit E espace euclidien.
Montrer que les projections orthogonales de E sont les projections qui sont des endomorphismes autoadjoints.

105.2

Soit E espace euclidien.
Montrer que les symétries orthogonales de E sont les isométries vectorielles qui sont des endomorphismes autoadjoints.

105.3

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S = A^\top A$ est une matrice symétrique positive.

(b) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Existe-t-il une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^\top A$? Donner une CNS sur S pour que A soit inversible.

105.4

(a) Montrer que, pour toute matrice $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que :

$$S = R^2$$

(b) Montrer l'unicité de cette matrice R.

105.5

Montrer que toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ admet une **décomposition polaire** :

$$A = \Omega S$$

où $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

105.6

Si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, on appelle **matrice de Householder** de V la matrice :

$$H_V = I_n - \frac{2}{\|V\|^2} VV^\top$$

Montrer que H_V est symétrique et orthogonale, et reconnaître l'endomorphisme qu'elle représente.

105.7

On s'intéresse à la matrice **de Hilbert** $H = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

(a) Pour $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, exprimer $X^\top HX$.

(b) Montrer que H est une matrice symétrique, définie positive.
On écrira $\frac{1}{i+j-1}$ comme l'intégrale sur $[0,1]$ d'un polynôme simple.

105.8

Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. Montrer que :

$$\operatorname*{Sup}_{x\neq 0_E} \frac{\langle x, u(x)\rangle}{\|x\|^2} = \operatorname{Max}\operatorname{Sp}(u)$$

210.1

Résoudre en appliquant la méthode de variation de la constante l'équation différentielle :

$$(1+x^2)y' - 2xy = 1 + x^2$$

210.2

Résoudre :

$$(x^2+1)y'' - (3x^2 - 4x + 3)y' + (2x^2 - 6x + 4)y = 0$$

en utilisant le changement de fonction inconnue $z = (x^2+1)y$.

210.3

Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation :

$$x^2y'' + xy' + y = 0$$

en effectuant le changement de variable $t = \ln x$.

210.4

On souhaite résoudre sur $]0, 1[$ l'équation :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$$

(a) Déterminer une solution développable en série entière y_0.

(b) Résoudre l'équation en posant $y = z\,y_0$.