Aux colleurs

C'est par ce programme de colle que ce termine la préparation des étudiants pour les écrits des concours. Merci pour votre investissement.
Il est possible que nous n'ayons pas tout à fait terminé de traiter tout le programme de colle avant le 20 mars : je vous enverrai un message en début de semaine pour vous faire part de notre avancée.

105. Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens

Isométries vectorielles et matrices orthogonales Isométries vectorielles : définition, caractérisation, propriétés, groupe orthogonal, spectre, si F est stables par u isométrie vectorielle, alors $F^\perp$ aussi.
Matrices orthogonales : définition, caractérisations, lien avec les isométries vectorielles, changement de base orthonormale, déterminant, groupe spécial orthogonal.
Orientation d'un espace euclidien. Produit mixte dans l'espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3, produit vectoriel dans l'espace euclidien orienté de dimension 3, orientation d'une droite, d'un plan.
Étude des isométries vectorielles du plan euclidien.
Étude des isométries vectorielles directes de l'espace euclidien de dimension 3.

Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques réelles Endomorphismes autoadjoints, exemples, caractérisation par la matrice en base orthonormée.
Le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$. Si F est stable par u autoadjoint, alors $F^\perp$ aussi. Les sous-espaces propres de u sont en somme directe orthogonale.
Théorème spectral pour les endomorphismes autoadjoints, pour les matrices symétriques réelles.
Endomorphismes autoadjoints (resp. matrices symétriques réelles) positifs, définis-positifs : définition et caractérisation spectrale.

210. Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

Équations différentielles linéaires d'ordre 2 Définition, équation homogène associée, importance de travailler sur un intervalle où les coefficients sont continus et l'équation normalisable, structure et dimension de l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de (E_0). Avec $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E) et y_1 une solution particulière de (E), on a $\mathcal{S} = y_1 + \mathcal{S}_0$. Théorème de Cauchy-linéaire.

Remarque Le programme officiel indique que « la résolution explicite de l'équation différentielle doit comporter des indications. »

Compléments Raccordement des solutions, détermination de solutions particulières polynomiales, développables en série entière.

Révision de première année Résolution des équation différentielles linéaires d'ordre 1, variation de la constante. Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

211. Fonctions vectorielles

L'étude des arcs paramétrés est hors programme.

212. Calcul différentiel

Limite et continuité Continuité sur une partie, par opérations, utilisation des coordonnées polaires, utilisation de chemins.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ Dérivée selon un vecteur, dérivée partielle, opérations. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, développement limité à l'ordre 1. Différentielle d'une fonction $\mathcal{C}^1$ (définie à l'aide des dérivées partielles).

Règle de la chaîne Dérivée de $f(x(t), y(t))$, dérivées partielles de $f(x(u, y), y(u, v))$, caractérisation des fonctions constantes.

Gradient Définition, lien avec la différentielle lorsque $\mathbb{R}^p$ est muni de sa structure euclidienne usuelle.

Applications géométriques Courbes du plan définies par une équation cartésienne implicite, tangente en un point régulier, lignes de niveau de f. Surfaces de l'espace définies par une équation cartésienne implicite, plan tangent en un point régulier.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ Définition, théorème de Schwarz, matrice hessienne, développement limité à l'ordre 2.

Extremums d'une fonction $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ Définition de maximum/minimum local/global, théorème des bornes atteintes, point critique, condition suffisante d'étude lorsque $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}$, lorsque $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^{+}$.

Exercices et résultats classiques à connaître

105.1

Soit E espace euclidien.
Montrer que les projections orthogonales de E sont les projections qui sont des endomorphismes autoadjoints.

105.2

Soit E espace euclidien.
Montrer que les symétries orthogonales de E sont les isométries vectorielles qui sont des endomorphismes autoadjoints.

105.3

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S = A^\top A$ est une matrice symétrique positive.

(b) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Existe-t-il une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^\top A$? Donner une CNS sur S pour que A soit inversible.

105.4

(a) Montrer que, pour toute matrice $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que :

$$S = R^2$$

(b) Montrer l'unicité de cette matrice R.

105.5

Montrer que toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ admet une **décomposition polaire** :

$$A = \Omega S$$

où $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

105.6

Si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, on appelle **matrice de Householder** de V la matrice :

$$H_V = I_n - \frac{2}{\|V\|^2} V V^\top$$

Montrer que H_V est symétrique et orthogonale, et reconnaître l'endomorphisme qu'elle représente.

105.7

On s'intéresse à la matrice **de Hilbert** $H = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

(a) Pour $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, exprimer $X^\top H X$.

(b) Montrer que H est une matrice symétrique, définie positive.
On écrira $\frac{1}{i+j-1}$ comme l'intégrale sur $[0,1]$ d'un polynôme simple.

105.8

Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. Montrer que :

$$\operatorname*{Sup}_{x \neq 0_E} \frac{\langle x, u(x) \rangle}{\|x\|^2} = \operatorname{Max} \operatorname{Sp}(u)$$

210.1

Résoudre en appliquant la méthode de variation de la constante l'équation différentielle :

$$(1+x^2)y' - 2xy = 1 + x^2$$

210.2

Résoudre :

$$(x^2+1)y'' - (3x^2 - 4x + 3)y' + (2x^2 - 6x + 4)y = 0$$

en utilisant le changement de fonction inconnue $z = (x^2+1)y$.

210.3

Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation :

$$x^2 y'' + x y' + y = 0$$

en effectuant le changement de variable $t = \ln x$.

210.4

On souhaite résoudre sur $]0, 1[$ l'équation :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$$

(a) Déterminer une solution développable en série entière y_0.

(b) Résoudre l'équation en posant $y = z\, y_0$.

211.1

On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$ pour $x > -1$.
Calculer $f^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

212.1

Les applications suivantes se prolongent-elles en des applications continues sur $\mathbb{R}^2$? ($\alpha > 0$)

(a) $(x, y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ (b) $(x, y) \mapsto \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ (c) $(x, y) \mapsto \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2 + y^2}$

212.2

Soit (S) la surface d'équation $z^3 = xy$.
Déterminer les plans tangents à (S) qui contiennent la droite d'équations : $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$.

212.3

Justifier l'existence et déterminer le maximum global sur $K = [0, 1] \times [0, 1]$ de la fonction :

$$f \;:\; (x, y) \mapsto \frac{x + y}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$$