Espaces vectoriels, endomorphismes et matrices

Pour bien démarrer

- Qu'est-ce qu'un **espace vectoriel** ? Comment montrer qu'un ensemble est un e.v. ?
- Peut-on citer des exemples d'espaces vectoriels ?
- Y a-t-il de bonnes représentations des espaces vectoriels ?
- Comment montrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux ?
- Union et intersection d'espaces vectoriels ?
- Qu'est-ce que la **somme** de deux sous-espaces vectoriels ?
- Que signifie « F et G sont **supplémentaires** dans E » ?
- Qu'est-ce qu'une famille **libre** ? En donner un exemple.
- Et une famille **liée** ? **génératrice** ?

- Qu'est-ce qu'une **base** ? Pourquoi est-ce intéressant ?
- Citer le théorème de la base extraite.
- Citer le théorème de la base incomplète.
- Énoncer la formule de Grassmann.

- Qu'est-ce qu'une **application linéaire**, un **endomorphisme** ?
  D'autres termes dans le même contexte ?
- Qu'est-ce que le **noyau** de u, à quoi sert-il ?
- Qu'est-ce que l'**image** de u, comment s'appelle sa dimension, à quoi sert-elle ?
- Y a-t-il un lien entre noyau et image de u ?

- Que dire à propos des **projecteurs** ? des **symétries** ?

- Qu'est-ce qu'une **matrice** ?
- Qu'est-ce que le **rang** d'une matrice ?
- Qu'est-ce que la **transposée** d'une matrice ?

- Qu'est-ce que le **déterminant** ?
- À quoi sert-il ?
- Comment le calcule-t-on ?

Lu dans le programme officiel

La notion de matrices équivalentes est hors programme.
Les étudiants doivent connaître l'expression d'un déterminant de Vandermonde.
L'étude de la dualité est hors programme.

1 Produit et somme d'espaces vectoriels

1.1 Produit d'espaces vectoriels

Définition. Soit $E_1, \dots, E_p$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On appelle **produit (cartésien)** des e.v. l'ensemble :

$$E_1 \times \cdots \times E_p = \prod_{i=1}^{p} E_i = \big\{(x_1, \dots, x_p) \text{ où } \forall i \in \{1, \dots, p\},\ x_i \in E_i\big\}$$

On munit cet ensemble des deux lois $+$ et $\cdot$ définies par :

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_p) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p)$$
$$(x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p) = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p) \in \prod\limits_{i=1}^{p} E_i$.

Proposition. Muni de ces deux opérations, $\prod\limits_{i=1}^{p} E_i$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition. Lorsque $E_1, \dots, E_p$ sont de dimensions finies, notées respectivement $n_1, \dots, n_p$, alors $\prod\limits_{i=1}^{p} E_i$ est de dimension finie, et sa dimension est $\sum\limits_{i=1}^{p} n_i$.

Exemple. $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}^p$ est un espace vectoriel produit sur $\mathbb{K}$, de dimension p.

1.2 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition. Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On appelle **somme** des sous-e.v. l'ensemble :

$$F_1 + \cdots + F_p = \sum_{i=1}^{p} F_i = \left\{ x \in E \text{ t.q. } \exists (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p,\ x = \sum_{i=1}^{p} x_i \right\}$$

Lemme. La somme de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition. Avec les mêmes notations, on a :

$$\sum_{i=1}^{p} F_i = \operatorname{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{p} F_i \right)$$

1.3 Sous-espaces vectoriels en somme directe

Définition. Dans le contexte du paragraphe précédent, on dit que les F_i **sont en somme directe** si et seulement si :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p,\ x_1 + \cdots + x_p = 0 \implies x_1 = \cdots = x_p = 0$$

Dans ce cas, pour indiquer que les F_i sont en somme directe, on modifie la notation, et on note $\bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$ pour désigner $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$.

Remarque. *Ça signifie que la seule façon de construire 0_E comme somme de vecteurs des F_i est de l'écrire comme somme de 0_{F_i}.*

Remarque. *Dans le cas de deux sous-espaces vectoriels, on peut vérifier que cette proposition est équivalente à $F_1 \cap F_2 = \{O\}$. Mais ça ne se généralise pas au cas de plus de deux sous-e.v.*

Théorème.

En conservant les notations précédentes, les F_i sont en somme directe si et seulement si tout vecteur x de $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ se décompose **de façon unique** selon les F_i, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \sum_{i=1}^{p} F_i,\ \exists!(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p \text{ t.q. } x = \sum_{i=1}^{p} x_i$$

Remarque. *Lorsque $x \in \sum\limits_{i=1}^{p} F_i$, il peut s'écrire $x = x_1 + \cdots + x_p$. On dit que l'on a écrit une décomposition de x selon $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$. Si les F_i sont en somme directe, cette décomposition est unique. On parle alors de* ***la décomposition de** x selon $\bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$.*

Remarque. *On trouve parfois la définition – équivalente, mais peu utile en pratique – de sous-espaces en somme directe :*

$$\forall i \in \{1, \dots, p\},\ F_i \cap \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} F_j\Big) = \{0_E\}$$

Bon, ça vaut le coup d'y réfléchir un peu quand même, par exemple en petite dimension.

1.4 Sommes directes et bases

On conserve les notations du paragraphe précédent, et on se place dans un espace de dimension finie.

Proposition. Soit $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ des bases respectives de $F_1, \dots, F_p$. On note $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ la concaténation de ces p bases.

Si les F_i sont en somme directe, alors $\mathcal{B}$ est une base de $\bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$, dite **adaptée à cette somme directe**.

On peut proposer une « réciproque » à la proposition précédente, que l'on appelle **décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base** :

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Si on organise et regroupe les vecteurs de $\mathcal{B}$ de façon à écrire $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$, alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} \operatorname{Vect}(\mathcal{B}_i)$$

Théorème.

Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension finies de E. Alors on a :

$$\dim\Big(\sum_{i=1}^{p} F_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$$

avec égalité si et seulement si les F_i sont en somme directe.

Théorème.

> Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Pour tout i, on considère $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$.
> Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u_{|E_i} = u_i$ pour tout i.

Remarque. *La donnée, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, de $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ permet donc de définir sans ambiguité une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ définie sur E tout entier.*

1.5 Cas de deux sous-espaces vectoriels, espaces supplémentaires

Définition. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits **supplémentaires** dans E si et seulement si $E = F \oplus G$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} E = F + G \\ F \text{ et } G \text{ sont en somme directe} \end{cases}$$

Exemple. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Exemple. On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Rappel. Caractérisation par décomposition unique.
En dimension finie, caractérisation utilisant un argument de dimension.
En dimension finie, caractérisation utilisant des bases.
Définition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E de dimension p. On appelle **base de E adaptée à F** toute base de E obtenue en complétant une base de F en une base de E.
Remarque. *Une telle base existe toujours par le théorème de la base incomplète.*
Rappel. Projecteurs et symétries ont été étudiés en première année.

2 Matrices et endomorphismes

2.1 Matrices par blocs

Considérer une matrice par blocs, c'est regrouper des coefficients adjacents dans la matrice en blocs de sous-matrices.

Exemple. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ peut être vue par blocs en regroupant :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \text{ soit } \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

en notant $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$.

Définition. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on considère des matrices :

$$A_{ij} \in \mathcal{M}_{n_i p_j}(\mathbb{K})$$

et on note $N = n_1 + \cdots + n_n$, $P = p_1 + \cdots + p_p$. On définit alors la **matrice par blocs** :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{NP}(\mathbb{K})$$

Définition. En conservant les notations précédentes, on dit que A est :

- **diagonale par blocs** lorsque pour tout i, $n_i = p_i$ et, pour tout i, j :

$$i \neq j \implies A_{ij} = 0$$

- **triangulaire supérieure par blocs** lorsque pour tout i, $n_i = p_i$ et, pour tout i, j :

$$i > j \implies A_{ij} = 0$$

Remarque. *Une matrice diagonale par blocs (resp. triangulaire par blocs) n'est pas, en général, diagonale (resp. triangulaire).*

Exemple. La matrice précédente est diagonale par blocs.

Combinaisons linéaires de matrices par blocs. Soit A et B deux matrices par blocs de dimensions compatibles pour les combinaisons linéaires :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{np} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{np} \end{pmatrix}$$

où pour chaque (i, j) A_{ij} et B_{ij} sont de même dimension, dans $\mathcal{M}_{n_i p_i}(\mathbb{K})$.
Alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} + \mu B_{11} & \cdots & \lambda A_{1p} + \mu B_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{n1} + \mu B_{n1} & \cdots & \lambda A_{np} + \mu B_{np} \end{pmatrix}$$

Remarque. *Ainsi, lorsque les blocs sont compatibles, les combinaisons linéaires se font bloc par bloc.*

Multiplications de matrices par blocs. Soit A et B deux matrices par blocs de dimensions compatibles pour la multiplication :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{np} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{p1} & \cdots & B_{pq} \end{pmatrix}$$

où pour chaque (i, j, k), $A_{ik} \in \mathcal{M}_{n_i p_k}(\mathbb{K})$ et $B_{kj} \in \mathcal{M}_{p_k q_j}$. Alors le produit AB s'écrit par blocs :

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nq} \end{pmatrix}$$

où $C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}$, pour tout i, j.

Remarque. *Il importe, avant d'envisager un produit par blocs, de bien vérifier la compatibilité pour le produit des dimensions des différents blocs.*

Corollaire. Le produit de deux matrices diagonales par blocs (resp. triangulaires supérieures par blocs) est une matrice diagonale par blocs (resp. triangulaire supérieure par blocs).

2.2 Sous-espaces stables

2.2.1 Sous-espaces stables par un endomorphisme

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que F **est stable par** u si et seulement si $\forall x \in F$, $u(x) \in F$.

Remarque. *On peut écrire $u(F) \subset F$, en utlisant la notion d'image directe d'un ensemble par une application. L'intérêt de cette notion vient surtout du fait que l'on peut alors donner la définition suivante :*

Définition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On peut définir :

$$u_F : \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

qui en un endomorphisme de F, appelé **endomorphisme induit**.

Remarque. *Ce n'est pas exactement la restriction de u à F, puisque le but aussi est réduit à F.*

Proposition. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E stables par u, alors $F + G$ et $F \cap G$ sont aussi stables par u.

Théorème.

Soit u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Alors $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v.

Corollaire. Soit u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Alors pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$ et $\operatorname{Im}(u - \lambda \mathrm{Id})$ sont stables par v.

2.2.2 Stabilité et matrices par blocs

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension n, F un sous-espace vectoriel de dimension p. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à F. Soit enfin $u \in \mathcal{L}(E)$. On a la caractérisation suivante :
F est stable par u si et seulement si la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est la matrice de l'endormophisme induit u_F.

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Les F_i sont tous stables par u si et seulement si la matrice de u dans une base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ adaptée à la somme directe est diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

où $A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$ est la matrice de l'endomorphisme induit u_{F_i}.

Corollaire. Soit E un espace de dimension finie n, de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme laissant stable les n droites vectorielles $F_i = \operatorname{Vect}(e_i)$. Alors, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où chaque $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

2.3 Matrices semblables et trace

2.3.1 Matrices semblables

Définition. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont **semblables** si et seulement s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A = PBP^{-1}$$

Proposition. La relation « est semblable à » est une relation d'équivalence, c'est-à-dire qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

Proposition. Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

Corollaire. Deux matrices semblables ont le même rang, le même déterminant.

2.3.2 Trace

Définition. Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On appelle **trace de** A la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$

Proposition. La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition. Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

Corollaire. Deux matrices semblables ont la même trace.

Ce qui précède justifie la définition suivante :

Définition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **trace de** u la trace d'une matrice carrée représentant u.

2.4 Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice

Définition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit u^p par récurrence en posant :

$$u^0 = \mathrm{Id}_E \text{ et, pour } p \geqslant 0,\ u^{p+1} = u^p \circ u = u \circ u^p$$

On appelle u^p l'**itéré** $p^{\text{ème}}$ de u.

Remarque. *Ainsi,* $u^p = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{p \text{ fois}}$.

Définition. Avec les mêmes notations, si $P = \sum\limits_{k=0}^{d} \alpha_k X^k$, on définit :

$$P(u) = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k u^k$$

qui est une combinaison linéaire des itérés de u.

On l'appelle un **polynôme de l'endomorphisme** u.

Remarque. *$P(u)$ est un endomorphisme de E.*

Proposition. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

- $(\lambda P + \mu Q)(u) = \lambda P(u) + \mu Q(u)$
- $(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$
- Comme $PQ = QP$, les polynômes de l'endomorphisme u commutent entre eux.

Remarque. *Attention ! On a bien :* $(PQ)(u)(x) = P(u)\Big(Q(u)(x)\Big)$

Proposition. Soit u et v deux endomorphismes de E qui commutent, et $P \in \mathbb{K}[X]$.
Alors $P(u)$ et v commutent.
En particulier, $\operatorname{Ker} P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont stables par v.

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée, et $P = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k X^k$ un polynôme. On définit :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k A^k$$

qui est une combinaison linéaire des puissances de A. On l'appelle un **polynôme de la matrice** A.

Remarque. *$P(A)$ est une matrice carrée.*

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On a :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(P(u)) = P\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\right)$$

Corollaire. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

- $(\lambda P + \mu Q)(A) = \lambda P(A) + \mu Q(A)$
- $P(A) \times Q(A) = (PQ)(A)$
- Les polynômes de la matrice A commutent entre eux.

Corollaire. Soit A et B deux matrices semblables et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Alors $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables.
Plus précisément, sinon nul $A = KBK^{-1}$ avec K inversible, alors $P(A) = KP(B)K^{-1}$.

Définition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). On appelle **polynôme annulateur** de u (resp. de A) tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P(u) = 0$ (resp. $P(A) = 0$).

Proposition. Tout endomorphisme de E e.v. de dimension finie (resp. toute matrice carrée) admet un polynôme annulateur non nul.

Exemple. Peut-on donner un polynôme annulateur pour les symétries ? les projecteurs ? les endomorphismes nilpotents ?

Exemple. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.
2. Montrer que A est inversible, et déterminer A^{-1}.
3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

2.5 Interpolation de Lagrange

Définition. Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ $(n+1)$ scalaires deux à deux distincts. Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, on note :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{(X - \alpha_k)}{(\alpha_i - \alpha_k)}$$

que l'on appelle **polynômes d'interpolation de Lagrange** aux points $\alpha_0, \dots, \alpha_n$.

Remarque. *Pour tout i, j, on a* $L_i(\alpha_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{si } i = j \\ 0 & \textit{si } i \neq j \end{cases}$

Lemme.

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(X) = 1$$

Théorème.

$(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
On peut préciser, pour $P \in \mathbb{K}_n[X]$:

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(\alpha_i) L_i(X)$$

3 Déterminants

3.1 Rappels des propriétés du déterminant d'une matrice carrée

Définition. L'application **déterminant** est l'unique application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant :

- $\det$ est linéaire par rapport aux colonnes de sa variable ;
- $\det$ est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable ;
- $\det I_n = 1$.

Lorsque $A = (a_{ij})_{ij}$, on note $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Règles de calcul. En notant $(C_1, \dots, C_n)$ les colonnes de la matrice A :

- Si une colonne est nulle, ou si deux colonnes sont proportionnelles, ou si les colonnes forment une famille liée, alors $\det A = 0$.
- L'opération élémentaire $C_i \leftrightarrow C_j$ change le signe du déterminant.
- L'opération élémentaire $C_j \underset{k \neq j}{\leftarrow} C_j + \lambda C_k$ ne change pas la valeur du déterminant.
- L'opération élémentaire $C_j \leftarrow \lambda C_j$ multiplie le déterminant par λ.

Développement par rapport à une colonne. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En notant Δ_{ij} le déterminant dit « mineur » de la matrice obtenue en supprimant de A la ligne i et la colonne j, on a :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

qui est développement de $\det A$ par rapport à la colonne j.

Proposition.

- $\det(A^\top) = \det A$
- $\det(AB) = \det A \times \det B$
- A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$, et dans ce cas $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

Remarque. *On définit aussi le déterminant d'un endomorphisme (resp. d'une famille de vecteurs) comme étant le déterminant d'une matrice représentant cet endomorphisme (resp. cette famille de vecteurs). Il est bien indépendant du choix de la base.*

3.2 Exemples de calculs de déterminants

3.2.1 Déterminant diagonal ou triangulaire

Résultat. Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire est le produit des termes diagonaux :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \spadesuit & \cdots & \cdots & \spadesuit \\ 0 & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \spadesuit \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

3.2.2 Déterminant triangulaire par blocs

Proposition. Soit A, C deux matrices carrées. On considère la matrice triangulaire par blocs définie par :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\det M = \det(A) \times \det(C)$$

Proposition. Soit A une matrice triangulaire par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \spadesuit & \cdots & \cdots & \spadesuit \\ 0 & A_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \spadesuit \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\det A = \det A_1 \det A_2 \dots \det A_p$$

3.2.3 Déterminant de Vandermonde

Résultat. Pour $a_1, a_2, \dots, a_n$ dans $\mathbb{K}$, le **déterminant de Vandermonde** :

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

vaut :

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

Remarque. *Il faut comprendre qu'il s'agit d'un produit double :* $\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} (a_j - a_i)$.

Remarque. *On trouvera au § 5.1 une autre preuve de ce résultat.*

4 Exercices et résultats classiques à connaître

4.1 Raisonner par CN

101.1

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $u^2 = 0$ et $u \neq 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.2 Les noyaux itérés

101.2

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
On pose

$$N = \bigcup_{p=0}^{\infty} \mathrm{Ker}\, u^p \text{ et } I = \bigcap_{p=0}^{\infty} \mathrm{Im}\, u^p$$

(a) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N = \mathrm{Ker}\, u^n$ et $I = \mathrm{Im}\, u^n$.

(b) Établir que N et I sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires stables par u et tels que les applications induites par u à N et I sont respectivement nilpotente et bijective.

4.3 Quatre exercices (un peu astucieux ?) qu'il faut avoir vu

101.3

Soit f un endomophisme de E. On suppose que, pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est liée.
Montrer que f est un homothétie.

101.4

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose A et B semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

101.5

Soit u un projecteur en dimension finie.
Montrer que sa trace est égale à son rang.

101.6

Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Montrer que A est inversible.
Lorsqu'elle satisfait cette propriété, on dit que A est à diagonale strictement dominante.
Ce résultat porte le nom de théorème de Hadamard.

4.4 Exploiter un polynôme annulateur factorisé

101.7

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension quelconque, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que P est annulateur de u, et que 0 est racine simple de P.

(a) Montrer que $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u$.

(b) En déduire que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

4.5 Un déterminant tridiagonal

101.8

Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On désigne par D_n le déterminant de A_n.

(a) Montrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.

(b) Déterminer D_n en fonction de n.

5 Compléments de cours

5.1 Complément : une preuve élégante du calcul du déterminant de Vandermonde

On suppose que $(a_1,\dots,a_n)$ sont deux à deux distincts. On forme :

$$P(t) = V(a_1,\dots,a_n,t)$$
$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} & a_n^n \\ 1 & t & t^2 & \dots & t^{n-1} & t^n \end{vmatrix}$$

En développant ce déterminant par rapport à la dernière ligne, $P(t)$ apparaît comme polynomiale en t :

$$P(t) = \clubsuit + \clubsuit\, t + \dots + \clubsuit\, t^{n-1} + V(a_1,\dots,a_n)t^n$$

Ce polynôme de degré (inférieur ou) égal à n admet n racines distinctes : $a_1,\dots,a_n$ et on connait son coefficient dominant. On a donc la relation :

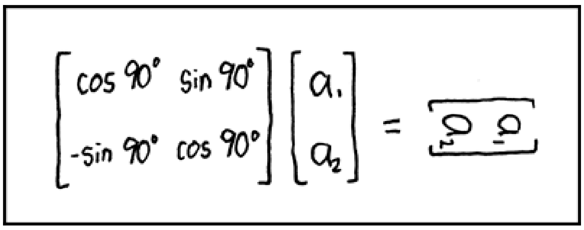
$$V(a_1,\dots,a_n,t) = V(a_1,\dots,a_n)\prod_{k=1}^{n}(t-a_k)$$

et donc la relation de récurrence :

$$V(a_1,\dots,a_n,a_{n+1}) = V(a_1,\dots,a_n)\prod_{k=1}^{n}(a_{n+1}-a_k)$$

On peut alors montrer par récurrence que :

$$V(a_1,\dots,a_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)$$



https://xkcd.com/184

Exercices de mathématiques

Familles libres, génératrices, bases

101.9

Dans $\mathbb{R}^3$, on définit :

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x - 2y + 3z = 0\}$$

On pose $u = (1, 2, 1)$ et $v = (-1, 1, 1)$. Montrer que H est un sous-e.v. de $\mathbb{R}^3$, et que (u, v) est une base de H.

101.10

Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Montrer que la famille de polynômes $\left((X - a_i)^n\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.

101.11

On considère :

$$F = \{x \mapsto P(x)\cos(x) + Q(x)\sin(x),\ P, Q \in \mathbb{R}_n[X]\}$$

(a) Montrer que F est un espace vectoriel.

(b) Montrer qu'il est de dimension finie, et déterminer sa dimension.

Sommes directes

101.12

Soit P un polynôme de degré $n + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$. Déterminer un supplémentaire de l'ensemble des multiples de P.

101.13

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On note :

$$F = \{\text{fonctions polynomiales de degré } \leqslant n\}$$
$$\text{et } G = \{f \in E \ /\ f^{(0)}(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 0\}$$

(a) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

(b) Préciser ce qu'est la projection sur F parallèlement à G.

101.14

Dans $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$, on considère :

$$\begin{aligned} F_1 &= \{f \in E \text{ t.q. } f \text{ constante}\} \\ F_2 &= \{f \in E \text{ t.q. } \forall t \in [-1, 0],\ f(t) = 0\} \\ F_3 &= \{f \in E \text{ t.q. } \forall t \in [0, 1],\ f(t) = 0\} \end{aligned}$$

Établir :

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$$

Déterminants

101.15

Calculer, pour $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$D_n(\theta) = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$$

Endomorphismes

Polynômes d'endomorphismes et de matrices

101.16

Soit $C \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{K})$. Déterminer une C.N.S. pour que la matrice $A = I_n + CL$ soit inversible et calculer alors son inverse.

101.17

Soient A et B deux matrices réelles carrées d'ordre n telles qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au moins égal à 1 et vérifiant

$$P(0) = 1 \text{ et } AB = P(A)$$

Montrer que A est inversible et que A et B commutent.

Matrices

101.18

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$.

(b) En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f est représentée par la matrice :

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

101.19

Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ vérifiant la relation :

$$u^3 + u = 0$$

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}$ dans laquelle la matrice de u est :

$$\operatorname{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

101.20

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$. Montrer que A est semblable à :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

101.21

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

(b) Préciser noyau et image de f.

101.22

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et on note :

$$P = \frac{1}{2}(A - I_2) \text{ et } Q = \frac{1}{2}(3I_2 - A)$$

(a) Vérifier que $P^2 = P$ et en déduire P^k, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

(b) Préciser les matrices Q^2, QP et PQ.

(c) Exprimer A comme combinaison linéaire de P et Q.

(d) Calculer A^n en fonction de P et Q, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

101.23

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, et :

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

une matrice triangulaire par blocs. On suppose connus deux polynômes P et Q annulateurs de A et B respectivement. Exprimer en fonction de P et Q un polynôme annulateur de M.

101.24

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $3n$ et u un endomorphisme de E tel que $u^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(u) = 2n$.

(a) Montrer que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u^2$ et que $\mathrm{Ker}\, u^2 = \mathrm{Im}\, u$.

(b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de u s'écrit par blocs :

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

Hyperplans

101.25

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel strict de E. Montrer que F peut s'écrire comme intersection d'un nombre fini d'hyperplans. Quel est le nombre minimum d'hyperplans nécessaires ?

101.26

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, H un hyperplan de E et D une droite vectorielle de E. À quelle condition H et D sont-ils en somme directe ?

Petits problèmes d'entrainement

✍ **101.27**

On note $E = \mathbb{K}[X]$. Pour $P \in E$, on note :

$$\varphi(P) = P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(1 - \frac{X}{2}\right) - 2P(X)$$

(a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

(b) Déterminer le degré de $\varphi(P)$ en fonction de celui de P.

(c) Déterminer $\mathrm{Ker}\, \varphi$.

(d) On pose $\begin{cases} Q_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ Q_n = \varphi(X^n) \end{cases}$.
Montrer que pour tout p, la famille $(Q_0, \dots, Q_p)$ est une base de $\mathbb{K}_p[X]$.

(e) Montrer que $\mathrm{Im}\, \varphi$ est un hyperplan de E.
Vérifier que $\mathrm{Im}\, \varphi$ est le noyau de la forme linéaire θ définie par :

$$\theta(P) = \int_0^1 P(t)\, \mathrm{d}t$$

✍ **101.28**

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) Pour X matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, préciser la trace de la matrice $X + \mathrm{tr}(X)A$.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
$$X + \mathrm{tr}(X)A = B$$

101.29

Soit $\mathcal{A}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui contient I_n et qui est stable par produit, c'est-à-dire :
$$\forall A, B \in \mathcal{A},\ AB \in \mathcal{A}$$
Montrer que si $A \in \mathcal{A}$ est inversible, alors $A^{-1} \in \mathcal{A}$.
On pourra considérer l'application $M \mapsto AM$.

101.30

Pour $p \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0,1\}$, on note S_p l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
$$\exists P \in \mathbb{R}_p[X],\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + P(n)$$

(a) Montrer que, si $u \in S_p$, alors P est unique. On le note P_u.

(b) Montrer que S_p est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(c) Montrer que $\phi\ :\ u \mapsto P_u$ est linéaire. Donner une base de son noyau. Que vaut son image ?

(d) Donner une base de S_p.
On pourra utiliser $R_k(X) = (X+1)^k - aX^k$ pour $k \in \{0, \dots, p\}$.

(e) Déterminer la suite $(u_n)_n$ définie par :
$$u_0 = -2 \text{ et } u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7$$

101.31

On note $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, on pose :
$$c_k\ :\ x \mapsto \cos(kx) \text{ et } e_k\ :\ x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$$

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(c_0, \dots, c_n)$ est libre.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(e_0, \dots, e_n)$ est libre.

101.32

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe $s \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^s = 0$. On appelle *indice de nilpotence de f* l'entier $r \in \mathbb{N}^*$ défini par :
$$r = \mathrm{Min}\{s \in \mathbb{N}^*,\ f^s = 0\}$$

(a) Pour $x \notin \mathrm{Ker}(f^{r-1})$, justifier que $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$ est libre.

(b) En déduire que $r \leqslant n$.

101.33

Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que :
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
Calculer $(AB)^2$, et en déduire BA.

101.34

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente : il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^r = 0$.

(a) Montrer que $I_n + N$ est inversible et calculer son inverse.

(b) Calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, $(I_n + N)^p$.

(c) On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1} et A^p.

101.35

(a) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs :

$$b_1 = (1,1,2),\ b_2 = (-2,-1,3) \text{ et } b_3 = (0,-3,-1)$$

et on note $E = \mathrm{Vect}(b_1, b_2)$, $F = \mathrm{Vect}(b_3)$.

a1. Montrer que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on dire des espaces E et F ?

a2. On note p la projection sur E parallèlement à F. Donner la matrice M de p dans la base $\mathcal{B}$.

a3. On note $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice N de p dans la base $\mathcal{E}$.

a4. Déterminer la matrice P de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$. Quelle relation lie les matrices M, N et P ?

(b) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs :

$$c_1 = (1,-1,-3),\ c_2 = (1,0,3) \text{ et } c_3 = (2,-1,1)$$

et on note $G = \mathrm{Vect}(c_1)$, $H = \mathrm{Vect}(c_2, c_3)$.

b1. Montrer que $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on dire des espaces G et H ?

b2. On note s la symétrie par rapport à G parallèlement à H. Donner la matrice S de s dans la base $\mathcal{C}$.

b3. Déterminer la matrice Q de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{C}$ et calculer son inverse.

b4. En utilisant la question précédente, calculer la matrice T de s dans la base $\mathcal{E}$.

101.36

(a) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geqslant 0$$

Indication : on montrera d'abord que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n \det \begin{pmatrix} A + \mathrm{i}B & \mathrm{i}B \\ 0 & -A + \mathrm{i}B \end{pmatrix}$$

(b) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que :

$$\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$$

(c) Trouver un contre-exemple au résultat précédent si A et B ne commutent pas.

101.37

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n la matrice définie par $A_n = (\mathrm{Max}(i,j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Calculer $\det(A_n)$ en fonction de n.

101.38

Pour a, b, c scalaires, on considère le déterminant carré d'ordre n suivant :

$$D(a,b,c) = \begin{vmatrix} c & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & c \end{vmatrix}$$

(a) Calculer $D(a,a,c)$ en fonction de a, c et n.

(b) Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto D(a+x, b+x, c+x)$ est affine.

(c) En déduire, pour $a \neq b$, l'expression de $D(a,b,c)$ en fonction de a, b, c et n.

101.39

Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$, et G un sous-espace vectoriel de E. Montrer que :

$$A = \{u \in \mathcal{L}(E,F) \text{ t.q. } G \subset \mathrm{Ker}\, u\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$. En donner sa dimension.

101.40

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $e = \mathrm{Id}_E$ et G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$ et $n = \mathrm{Card}(G)$. On note : $p = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{g\in G} g$.

(a) Montrer que : $\forall h \in G,\ p \circ h = p$.

(b) En déduire que p est un projecteur de E.

(c) Établir : $\displaystyle\bigcap_{g\in G} \mathrm{Ker}(g-e) = \mathrm{Im}(p)$.

(d) En déduire que :

$$\dim\left(\bigcap_{g\in G} \mathrm{Ker}(g-e)\right) = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} \mathrm{tr}(g)$$