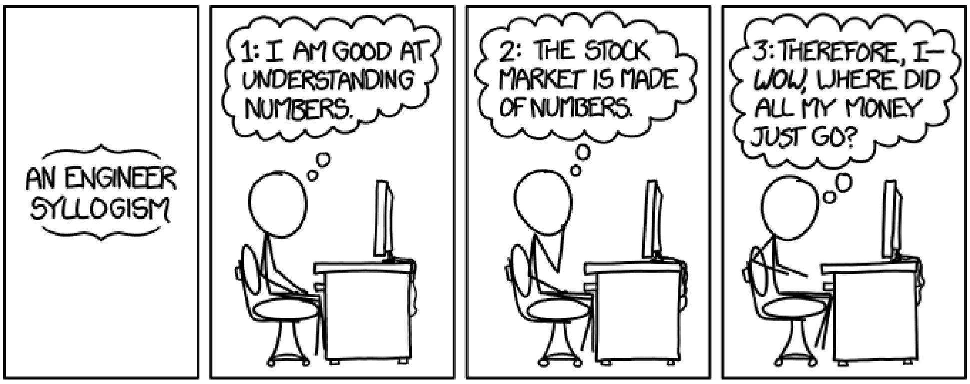
Valeurs propres, vecteurs propres

Pour bien démarrer

1. Qu'est-ce qu'un sous-espace stable par un endomorphisme ? En quoi est-ce intéressant ?
2. Qu'est-ce qu'une somme directe ?
3. Que peut-on déduire de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ diagonale ? triangulaire supérieure ? diagonale par blocs ?
4. Si $u(x) = \lambda x$, que vaut $u^2(x)$?
5. En dimension finie, comment caractériser que u est un automorphisme ?
6. Que signifie que deux matrices sont semblables ? À quoi est semblable I_n ?
7. Que signifient :
   - « α est racine du polynôme P »
   - « α est racine double du polynôme P »
   - « α est racine d'ordre k du polynôme P »
8. Un polynôme a-t-il toujours des racines ?
9. Que dire de la somme et du produit des racines d'un polynôme ?



https://xkcd.com/1570

Lu dans le programme officiel

Les étudiants doivent savoir que si $u \circ v = v \circ u$, les sous-espaces propres de u sont stables par v.
La notion de valeur spectrale est hors programme.
Par convention, le polynôme caractéristique est unitaire.
La démonstration du théorème de Cayley-Hamilton n'est pas exigible.
Le théorème de décomposition des noyaux est hors programme.
La démonstration de la condition de trigonalisabilité n'est pas exigible.
La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.
La notion de polynôme minimal est hors programme.

1 Éléments propres d'un endomorphisme

On travaille pour ce paragraphe dans un espace vectoriel de dimension quelconque.

1.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Proposition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$ un vecteur non nul. La droite $\text{Vect}(x)$ est stable par u si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$u(x) = \lambda x$$

Dans ce cas, pour tout $y \in \text{Vect}(x)$, on a aussi : $u(y) = \lambda y$. Ainsi l'endomorphisme induit par u sur D est l'homothétie de rapport λ.

Définition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est **une valeur propre** de u si et seulement s'il existe $x \in E$ **non nul** tel que :

$$u(x) = \lambda x$$

Dans ce cas, x est appelé un **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.

Remarque. *Ainsi, x est vecteur propre de u si et seulement si* $\begin{cases} x \neq 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{K},\ u(x) = \lambda x \end{cases}$

Remarque. *On appelle :*

$$u(x) = \lambda x$$

*l'**équation aux éléments propres** de u. Ce n'est pas une équation au sens habituel : on cherche en même temps les solutions x et les conditions sur λ pour qu'il y ait de solutions non nulles.*

Exemple. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall f \in E,\ u(f) = f'$$

Déterminer les valeurs propres de u.

Exemple. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et u l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall P \in E,\ u(P) = P'$$

Déterminer les valeurs propres de u.

Exemple. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et u la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer les valeurs propres de u.

Exemple. Lorsque u est un projecteur (resp. une symétrie), donner deux valeurs propres de u.

Proposition. λ est une valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda \text{id}_E$ n'est pas injectif, c'est-à-dire :

$$\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) \neq \{0_E\}$$

Remarque. 0 *est valeur propre des endomorphismes non injectifs.*

1.2 Sous-espaces propres

Définition. Si λ est une valeur propre de u, on appelle **sous-espace propre de u associé à λ** le sous-ev :

$$E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$$

Remarque.

- *C'est l'ensemble des vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ, auquel on ajoute le vecteur nul.*
- *$E_\lambda(u)$ est au moins de dimension 1 lorsque λ est valeur propre de u.*
- *u induit une homothétie de rapport λ sur $E_\lambda(u)$.*

1.3 Propriétés

Proposition. Si v commute avec u, alors pour toute valeur propre λ de u, $E_\lambda(u)$ est stable par v.

Théorème.

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u, alors la somme des sous-espaces propres est directe :

$$\sum_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{id}_E) = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{id}_E)$$

Corollaire. Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

Exemple. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des réels deux à deux distincts. Montrer que la famille $(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i t})_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une famille libre.

1.4 Valeurs propres et polynômes annulateurs

Proposition. Si P est un polynôme annulateur de u, alors les valeurs propres de u sont parmi les racines de P, c'est-à-dire :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \implies P(\lambda) = 0$$

La réciproque est fausse.

2 Éléments propres en dimension finie

On suppose dorénavant que E est de dimension finie n.

2.1 Éléments propres d'un endomorphisme en dimension finie

Proposition. Soit E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) λ est valeur propre de u

(ii) $u - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas inversible

(iii) $\det(u - \lambda \mathrm{id}_E) = 0$

Définition. On appelle **spectre de** u l'ensemble de ses valeurs propres. On le note $\mathrm{Sp}(u)$.

Remarque. *S'il y a un risque d'ambiguïté, on note* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ *les valeurs propres (dans* $\mathbb{K}$*) de l'endomorphisme* u *du* $\mathbb{K}$*-ev* E.

Proposition. Soit $n = \dim E$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u. Alors :

$$p \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(u) \leqslant n$$

En particulier, $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(u)) \leqslant n$.

2.2 Éléments propres d'une matrice carrée

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Les **éléments propres de** A sont ceux de l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A : valeurs propres, spectre, vecteurs propres, sous-espaces propres.

Remarque. *On trouve parfois une définition « purement matricielle » : On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est **valeur propre de** A si et seulement s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulle telle que $AX = \lambda X$. Dans ce cas, X s'appelle un **vecteur propre associé à la valeur propre** λ.*

Exemple. Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque. *Les résultats établis pour les éléments propres des endomorphismes en dimension finie se transposent au cas des matrices carrées.*

Exemple. Déterminer les éléments propres de la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) λ est valeur propre de A

(ii) $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ t.q. $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$

(iii) $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible

(iv) $\det(A - \lambda I_n) = 0$

(v) $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$

Proposition. Deux matrices semblables ont le même spectre.

Remarque. *Chercher les vecteurs propres associés à la valeur propre λ, c'est chercher les solutions X non nulles à l'équation linéaire :*

$$(A - \lambda I_n)X = 0$$

c'est-à-dire les $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} (a_{1,1} - \lambda)x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & (a_{2,2} - \lambda)x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & (a_{n,n} - \lambda)x_n & = & 0 \end{cases}$$

2.3 Polynôme caractéristique

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique de** A le polynôme :

$$\chi_A \ : \ X \mapsto \det(X\, I_n - A)$$

Définition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **polynôme caractéristique de** u le polynôme :

$$\chi_u \ : \ X \mapsto \det(X\, \mathrm{id}_E - u)$$

Proposition. Le polynôme caractéristique est un polynôme. Il est unitaire et de degré n.
On peut préciser quelques coefficients :

$$\chi_A(X) = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

Preuve. Voir explication en annexe, au § 4.1 □

Exemple. Quel est le polynôme caractéristique d'une matrice diagonale ? triangulaire ?

Remarque. *On trouve dans certains ouvrages la convention $\chi_A(X) = \det(A - X\, I_n)$.*

Proposition. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Exemple. Donner un exemple de matrices ayant le même polynôme caractéristique, mais qui ne sont pas semblables.

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A et $A^\top$ ont le même polynôme caractéristique.

2.4 Polynôme caractéristique et valeurs propres

Théorème.

> Les valeurs propres de u (resp. A) sont les racines de son polynôme caractéristique.

Remarque. *Le théorème précédent énonce bien une caractérisation.*

Détermination pratique des valeurs propres. Sur un exemple concret en dimension finie, on peut déterminer les valeurs propres d'une matrice en calculant, sous forme factorisée, son polynôme caractéristique.

Exemple. Déterminer les valeurs propres de :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque. *Si une matrice est triangulaire ou diagonale, ses valeurs propres sont ses termes diagonaux, comptés avec multiplicité.*

2.5 Multiplicité des valeurs propres

Définition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) et λ une valeur propre. On appelle **ordre de multiplicité** de la valeur propre λ son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme χ_u (resp. χ_A).

Remarque. *Lorsque l'ordre de multiplicité est 1 (resp. 2), on dit que la valeur propre est simple (resp. double).*

Proposition. Tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) admet au plus n valeurs propres, comptées avec multiplicité.

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que le polynôme caractéristique est **scindé**. Alors A admet exactement n valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité, et on a :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \ \text{ et } \ \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Le résultat est encore valable pour $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.

Remarque. *Ce résultat s'applique toujours lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*

2.6 Polynôme caractéristique et sous-espace stable

Lemme. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme, et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On note u_F l'endomorphisme induit par u sur F.

Alors χ_{u_F} divise χ_u.

Théorème.

La dimension d'un sous-espace propre est au plus égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante :
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, en notant $m(\lambda)$ la multiplicité de λ, on a :

$$1 \leqslant \dim E_\lambda(A) \leqslant m(\lambda)$$

Le résultat est encore valable pour $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.

Corollaire. Si λ est une valeur propre de multiplicité 1, alors le sous-espace propre associé est une droite vectorielle, c'est-à-dire est de dimension 1.

3 Exercices et résultats classiques à connaître

3.1 Une recherche astucieuse d'éléments propres

102.1

Déterminer les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3.2 Valeurs propres de $u \circ v$ et $v \circ u$

102.2

Soit u et v deux endomorphismes d'un e.v.

(a) Si $\lambda \neq 0$ est valeur propre de $u \circ v$, montrer qu'il l'est aussi de $v \circ u$.

(b) Montrer que cette propriété reste vraie pour $\lambda = 0$ lorsque l'espace E est de dimension finie.

(c) Pour $P \in E = \mathbb{R}[X]$, on pose dans cette question :

$$u(P) = P' \text{ et } v(P) = \int_0^X P(t)\,\mathrm{d}t$$

Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$.

(d) Conclure.

3.3 Autour de la matrice compagnon

102.3

Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire. On appelle **matrice compagnon** de P la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que P est le polynôme caractéristique de C.

(b) On suppose dans cette question que P est scindé à racines simples, notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que :

$$C^\top = V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{-1}$$

où $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ désigne la matrice de Vandermonde de $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

3.4 Une condition sur la dimension de l'espace vectoriel

102.4

À quelle condition existe-t-il $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + 2A + 5I_n = 0$?

3.5 Un endomorphisme matriciel

102.5

On considère les matrices réelles :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(a) Calculer $AM - MA$.

(b) Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme :

$$M \mapsto AM - MA$$

4 Compléments de cours

4.1 Comment expliquer l'expression du polynôme caractéristique ?

Explication. Pour justifier que $\chi_A(X) = X^n - \operatorname{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$, notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice A, $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det(X\,E_1 - C_1, X\,E_2 - C_2, \dots, X\,E_n - C_n) \\
&= X\,\det(E_1, X\,E_2 - C_2, \dots, X\,E_n - C_n) - \det(C_1, X\,E_2 - C_2, \dots, X\,E_n - C_n) \\
&\qquad \text{en développant par linéarité par rapport à la première colonne} \\
&= X^n \det(E_1, \dots, E_n) - X^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \det(E_1, \dots, E_{k-1}, C_k, E_{k+1}, \dots, E_n) + \dots + (-1)^n \det(C_1, \dots, C_n) \\
&\qquad \text{en développant par } n\text{-linéarité et en regroupant les termes selon les puissances de } X \\
&= X^n \det(I_n) - X^{n-1} \sum_{k=1}^{n} a_{kk} + \dots + (-1)^n \det(A) \\
&\qquad \text{en développant les déterminants par rapport aux colonnes contenant les } E_i,\ i \neq k \\
&= X^n - X^{n-1} \operatorname{tr}(A) + \dots + (-1)^n \det(A)
\end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme, unitaire de degré n. □

Exercices de mathématiques

102.6

Déterminer les réels x, y tq $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ soit vecteur propre de $\begin{pmatrix}x & 1 & 1\\1 & y & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

102.7

Soit u un automorphisme d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. Montrer que :

$$\mathrm{Sp}(u^{-1}) = \left\{\frac{1}{\lambda},\ \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\right\}$$

102.8

(a) Montrer que si P est un polynôme annulateur d'un endomorphisme f alors $P(\lambda) = 0$ pour toute valeur propre λ de f.

(b) Montrer que si f vérifie

$$f^3 + 2f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$$

alors f est bijectif.

102.9

Déterminer les éléments propres de :

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

102.10

Déterminer les éléments propres de :

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & \ddots & 0\\ & & & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

102.11

Pour $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\|A\| = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\mathrm{Max}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

(a) Montrer que l'on définit ainsi une norme.

(b) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$.

102.12

Pour $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on pose $T(u) = v$ où :

$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$$

Déterminer les éléments propres de T.

102.13

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\big(\varphi(P)\big)(X) = P(1-X)$

(a) L'endomorphisme φ est-il injectif ? bijectif ?

(b) Donner les valeurs propres de φ ainsi qu'une base de vecteurs propres.

102.14

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $f(u) = v$ avec :

$$\begin{cases} v_0 = u_0\\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})\ \forall n \in \mathbb{N}\end{cases}$$

Déterminer les valeurs propres et espaces propres de f.

102.15

(a) Montrer que l'application définie par :

$$\varphi(P) = (X^2-1)P'(X) - (4X+1)P(X)$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

(b) Résoudre l'équation différentielle :

$$y' = \left(\frac{5+\lambda}{2(x-1)} + \frac{3-\lambda}{2(x+1)}\right) y$$

(c) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.

Petits problèmes d'entrainement

✍ **102.16**

Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $f \circ (f^2 + \mathrm{id}) = (f^2 + \mathrm{id}) \circ f = f^3 + f = 0$.

(a) Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

(b) b1. Montrer que, si λ est valeur propre de f, alors $\lambda^3 + \lambda = 0$. En déduire la seule valeur propre réelle possible de f.

b2. En considérant le degré du polynôme caractéristique de f, expliquer pourquoi f admet au moins une valeur propre réelle. Conclure quant à $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.

(c) Montrer que l'on peut trouver une base dans laquelle f a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

✍ **102.17**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $a, b \in \mathbb{C}$. On suppose :

$$u \circ v - v \circ u = au + bv$$

(a) Dans le cas où $a = b = 0$, montrer que u et v ont un vecteur propre en commun.

(b) Dans le cas où $a \neq 0$ et $b = 0$, montrer que u n'est pas inversible. Calculer $u^n \circ v - v \circ u^n$ et montrer que u est nilpotent. Conclure que u et v ont un vecteur propre en commun.

(c) Dans le cas où $a \neq 0$ et $b \neq 0$, montrer que u et v ont un vecteur propre en commun.

102.18

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique, c'est-à-dire satisfaisant :

$$\begin{cases} 0 \leqslant a_{ij} \leqslant 1 & \forall i, j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 & \forall i \end{cases}$$

(a) Montrer que 1 est valeur propre de A.

(b) Établir que :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A),\ \exists i \text{ t.q. } |\lambda - a_{ii}| \leqslant 1 - a_{ii}$$

En déduire que :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} BF(a_{ii}, 1 - a_{ii})$$

102.19

Soit E un $\mathbb{C}$-ev, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que, si $f - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas injective, $P(f) - P(\lambda)\mathrm{id}_E$ non plus.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que, si $f - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas surjective, $P(f) - P(\lambda)\mathrm{id}_E$ non plus.

(c) On suppose $\deg(P) \geqslant 1$, et on considère $\mu \in \mathbb{C}$. Montrer que, si $P(f) - \mu \mathrm{id}_E$ n'est pas injective (resp. surjective), alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mu = P(\lambda)$ et $f - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas injective (resp. surjective).

102.20

Soient u endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 2$.
On suppose que E est le seul sous-espace vectoriel non nul stable par u.

(a) L'endomorphisme u possède-t-il des valeurs propres ?

(b) Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, la famille $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E. Quelle est la forme de la matrice de u dans cette base ?

(c) Montrer que cette matrice ne dépend pas du choix de x.

102.21

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et muni d'une base $\mathcal{B}$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et H un hyperplan de E. On note $E^\star = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

(a) Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $\{u \in E^\star \text{ t.q. } u(H) = \{0\}\}$.

(b) Montrer que si H a pour équation $u(x) = 0$ alors H est stable par f si et seulement si, $u \circ f$ est colinéaire à u.

(c) Soient A et L les matrices dans $\mathcal{B}$ de f et u. Montrer que H est stable par f si, et seulement si, $L^\top$ est vecteur propre de $A^\top$.

(d) Déterminer les plans stables par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

102.22

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire admettant a pour unique valeur propre. Montrer l'équivalence entre :

(i) $|a| < 1$

(ii) $\sum\limits_{k=0}^{p} M^k$ converge lorsque $p \to +\infty$

(iii) $M^p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$

102.23

Soit H une matrice carrée complexe de rang 1.

(a) Montrer qu'il existe une matrice colonne A et une matrice ligne B telles que $H = AB$.

(b) Montrer que $H^2 = \mathrm{tr}(H)H$.

(c) Donner le polynôme caractéristique de H.

(d) Donner une condition nécessaire ou suffisante pour que $H + I_n$ soit inversible. Donner alors son inverse.

102.24

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ la matrice définie par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ A & A \end{pmatrix}$$

Exprimer le polynôme caractéristique de M en fonction de celui de A.