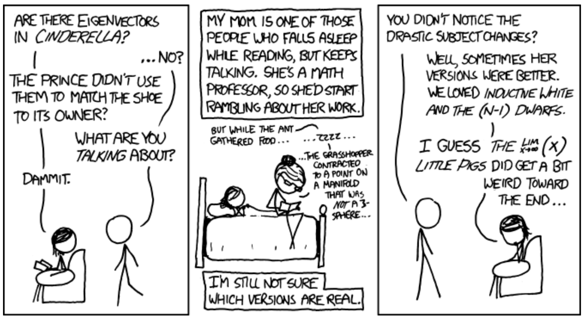
Réduction en dimension finie

Cours

Pour bien démarrer

1. Comment définir « valeur propre » ? « vecteur propre » ?
2. Que dire des sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes ?
3. Que dire de la dimension d'un sous-espace propre ?
4. Qu'est-ce qu'un polynôme annulateur d'un endomorphisme ?
5. Quelle relation entre le spectre et les racines d'un polynôme annulateur ?
6. Énoncer le théorème de la division euclidienne des polynômes.
7. Rappeler la formule de changement de base.



https://xkcd.com/872

Lu dans le programme officiel

La démonstration du théorème de Cayley-Hamilton n'est pas exigible.
Le théorème de décomposition des noyaux est hors programme.
La démonstration de la condition de trigonalisabilité n'est pas exigible.
La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.
La notion de polynôme minimal est hors programme.

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1 Diagonalisation

1.1 Endomorphismes diagonalisables, matrices carrées diagonalisables

Définition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **diagonalisable** si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{ est diagonale}$$

Remarque. *Une telle base est appelé* ***base de diagonalisation*** *de u. On dit aussi que u est* ***diagonalisable dans la base $\mathcal{B}$****.*

En cas de diagonalisabilité, les termes diagonaux de la matrices sont les valeurs propores de u, et les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres associés.

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On dit que A est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé à A est diagonalisable.

Proposition. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

Remarque. *Diagonaliser un endomorphisme u, c'est déterminer une base de vecteurs propres et exprimer la matrice (diagonale) représentant u dans cette base.*

Diagonaliser une matrice A, c'est déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

Théorème.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) u est diagonalisable

(ii) Il existe une base de E formée de vecteurs propres de u

(iii) E est la somme directe des sous-espaces propres de u :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

Exemple. Les projecteurs, les symétries sont diagonalisables.

1.2 Caractérisation par les sous-espaces propres

Théorème.

$u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) = n$$

Proposition. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est diagonalisable, alors son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

Remarque. *Il s'agit bien d'une condition nécessaire de diagonalisabilité, et elle est toujours satisfaite lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*

Théorème.

$u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est digonalisable si et seulement si :

- son polynôme caractéristique est scindé
- la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre

Corollaire. Dans E de dimension n, si $u \in \mathcal{L}(E)$ admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors u est diagonalisable et ses espaces propres sont des droites vectorielles.

Remarque. *Résultat analogue pour les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Remarque. *Ce corollaire donne bien une condition suffisante, mais non nécessaire, de diagonalisabilité. Dans ce cas, χ_u est scindé à racines simples.*

Exemple. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On rappelle qu'on a calculé les polynômes caractéristiques au chapitre précédent :

$$\chi_A(X) = X(X^2-3) \qquad \chi_B(X) = (X-3)(X-1)^2 \qquad \chi_C(X) = (X-2)^3$$
$$\chi_D(X) = (X+4)(X-2)^2 \qquad \chi_E(X) = (X+1)(X-1)^2 \qquad \chi_F(X) = X^3-1$$

1.3 Une condition suffisante de diagonalisabilité

Une conséquence du théorème spectral, qui sera étudié au chapitre 105, est le résultat suivant :

Théorème.

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

1.4 Application de la diagonalisation

1.4.1 Calcul des puissances successives d'une matrice diagonalisable

Méthode 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, par récurrence :

$$A^k = PD^kP^{-1} \text{ et } D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Exemple. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer A^k lorsque $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Méthode 2. En connaissant un polynôme annulateur de A, on peut exploiter une division euclidienne.

Exemple. À nouveau avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, déterminer un polynôme annulateur de degré 2 et en déduire l'expression de A^k.

Méthode 3. Lorsque la matrice s'écrit par exemple : $\lambda I + J$ où J est nilpotente ou à puissance simple, on peut exploiter la formule du binôme de Newton.

Exemple. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer B^k lorsque $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.2 Suites récurrentes linéaires simultanées

Exemple. Déterminer les suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 1 \\ w_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = 2u_n + v_n + w_n \end{cases}$$

1.4.3 Suites récurrentes linéaires à coefficients constants

Définition. On dit qu'une suite $(u_n)_n$ satisfait une **relation de récurrence linéaire d'ordre p à coefficients constants** s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$ des scalaires tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+(p-1)} + \cdots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n$$

On appelle **équation caractéristique** associée à cette relation de récurrence l'équation :

$$r^p = a_{p-1}r^{p-1} + \cdots + a_1 r + a_0$$

Exemple. Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 étudiées en première année rentrent dans ce cadre.

Proposition. L'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre p à coefficients constant est un espace vectoriel de dimension p sur $\mathbb{K}$.

Technique d'étude. On conserve les notations de la définition, et on définit :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{p-2} & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

La suite $(u_n)_n$ vérifie la relation de récurrence précédente si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$$

Par suite, la suite X_n est uniquement déterminée par X_0 et on a par récurrence :

$$X_n = A^n X_0$$

Remarque. *La matrice A est la matrice compagnon du polynôme :*

$$P = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \cdots - a_1 X - a_0$$

donc $\chi_A = P$. Les racines de l'équation caractéristique sont les valeurs propres de la matrice A.

Exemple. Déterminer la suite définie par :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_2 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 7u_{n+2} - 14u_{n+1} + 8u_n$$

1.4.4 Systèmes différentiels

Exemple. Résoudre :

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

où les inconnues sont x et y, deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

2 Diagonalisation et polynômes annulateurs

2.1 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème de Cayley-Hamilton.

Le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un polynôme annulateur de A :

$$\chi_A(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$$

Théorème de Cayley-Hamilton.

Le polynôme caractéristique de $u \in \mathcal{L}(E)$ est un polynôme annulateur de u :

$$\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Preuve. La preuve, non exigible, est proposée en annexe au § 5.1. □

2.2 Polynômes annulateurs scindés et diagonalisabilité

Théorème.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Théorème.

> Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Preuve. La preuve, non exigible, est proposée en annexe au § 5.2. □

Attention. *On ne confondra pas polynôme annulateur et polynôme caractéristique, ni « existence d'un polynôme annulateur scindé simple » avec « le polynôme caractéristique est scindé simple ».*

Proposition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Si u est diagonalisable et F stable par u, alors l'endomorphisme induit u_F induit par u sur F est diagonalisable.

Corollaire. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$ où chaque F_k est stable par u, alors u est diagonalisable si et seulement si chaque endomorphisme induit u_{F_k} par u sur F_k est diagonalisable.

Corollaire. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose u diagonalisable. Alors F est stable par u si et seulement si F est engendré par une famille de vecteurs propres de u.

Remarque. *Ce dernier résultat est faux si u n'est pas diagonalisable.*

Théorème.

> Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$ annule A.

Théorème.

> Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ annule u.

3 Trigonalisation

Définition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **trigonalisable** si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{ est triangulaire supérieure}$$

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **trigonalisable** si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé à A est trigonalisable.

Remarque. *Trigonaliser un endomorphisme u, c'est déterminer une base de vecteurs dans laquelle la matrice représentant u est triangulaire.*
Trigonaliser une matrice A, c'est déterminer une matrice T triangulaire et une matrice P inversible telles que $A = PTP^{-1}$.
Réduire un endomorphisme u (resp. une matrice A), c'est le diagonaliser ou le trigonaliser.

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est **trigonalisable** si et seulement elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Proposition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) trigonalisable. Alors les éléments diagonaux d'une matrice triangulaire représentant u (resp. triangulaire semblable à A) sont les valeurs propres de u (resp. A) comptées avec multiplicité.

Théorème.

> $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

Preuve. La preuve, non exigible, est proposée en annexe au § 5.3. □

Corollaire. Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), alors u (resp. A) est trigonalisable.

Remarque. *On peut aller un peu plus loin et imposer la forme* a priori *de la matrice triangulaire, mais cela dépasserait le cadre de notre programme.*

Exemple. Déterminer l'expression de la suite définie par :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_2 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 11u_{n+2} - 39u_{n+1} + 45u_n$$

4 Exercices et résultats classiques à connaître

4.1 Conditions de diagonalisabilité

103.1

Pour les matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, calculer le polynôme caractéristique et étudier la diagonalisabilité.

4.2 Diagonalisabilité d'une matrice de rang 1

103.2

(a) Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1. Montrer qu'il existe deux matrices colonnes U et V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = UV^\top$.

(b) Exprimer A^2 en fonction de A. En déduire les valeurs propres possibles de A.

(c) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

4.3 Un exemple d'équation matricielle

103.3

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On propose de résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation : $(E)\ :\ X^2 + X = A$.

(a) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

(b) Déterminer les matrices $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Y^2 + Y = D$. On commencera pour cela par montrer qu'une telle matrice Y commute avec D, et par en déduire que c'est une matrice diagonale.

(c) Résoudre alors l'équation (E).

4.4 Diagonalisation simultanée

103.4

Dans une espace vectoriel E de dimension finie, on considère deux endomorphismes u et v diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$.

(a) Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u.

(b) Montrer que l'endomorphisme induit de u à un sous-espace propre de v est diagonalisable.

(c) Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u et v.

4.5 Réduction d'une matrice circulante

103.5

On considère, pour $n \geqslant 2$, la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que la matrice J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

(b) Application : calculer, pour $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$

5 Compléments de cours

5.1 Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

Soit $x \in E$. On veut montrer que $\chi_u(u)(x) = 0$ pour tout $x \in E$.
Si $x = 0_E$, on a bien $\chi_u(u)(0) = 0$.
On suppose donc $x \neq 0_E$. La famille (x) est libre, tandis que $(x, u(x), \dots, u^n(x))$ est liée comme famille de $n+1$ vecteurs dans un espace de dimension n. On peut donc trouver p tel que $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ libre et $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), u^p(x))$ liée. Il existe donc $a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que $u^p(x) = a_{p-1}u^{p-1}(x) + \cdots + a_1 u(x) + a_0 x$. On note $\mathcal{B}$ une base de E obtenue en complétant la famille libre $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\boxed{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & a_{p-2} \\ 0 & \cdots\ 0 & 1 & a_{p-1} \end{matrix}}}^{A} & \begin{matrix} \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ & & \\ \vdots & & \vdots \\ \bullet & \cdots & \bullet \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \boxed{\quad B \quad} \end{array}\right)$$

On reconnaît, dans le bloc en haut à gauche noté A, la transposée d'une matrice compagnon. En calculant par blocs, on a :

$$\begin{aligned} \chi_u(X) &= \chi_A(X) \times \chi_B(X) \\ &= \left(X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k\right) \times \chi_B(X) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\chi_u(u) = \chi_B(u) \circ \left(u^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k\right)$$

et donc :

$$\begin{aligned} \chi_u(u)(x) &= \chi_B(u)\left(u^p(x) - \sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k(x)\right) \\ &= \chi_B(u)(0_E) \\ &= 0 \end{aligned}$$

5.2 Une démonstration de la caractérisation des endomorphismes diagonalisables

On veut montrer que u est diagonalisable si et seulement si u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose u diagonalisable, et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres, deux à deux distinctes.

Définissons $P = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$ et montrons que P est annulateur de u. On fixe alors $x \in E$, et on va montrer que $P(u)(x) = 0$.

Comme u est diagonalisable, on a :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(u)$$

Donc x se décompose de manière unique en $x = x_1 + \cdots + x_p$ où chaque x_k est dans $E_{\lambda_k}(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda_k \mathrm{id}_E)$.

Soit $k \in \{1, \dots, p\}$. On note Q le polynôme tel que $P = Q \times (X - \lambda_k)$. On calcule alors :

$$\begin{aligned} P(u)(x_k) &= Q(u) \circ (u - \lambda_k \mathrm{id}_E)(x_k) \\ &= Q(u)(0_E) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Il suit, par linéarité, que $P(u)(x) = 0$.

Ainsi, $P(u) = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$

- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de u, scindé à racines simples notées $\lambda_1, \dots, \lambda_q$. On note $(L_1, \dots, L_q)$ les polynômes d'interpolation de Lagrange définis par :

$$L_k(X) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{q} \frac{(X - \lambda_i)}{(\lambda_k - \lambda_i)}$$

Alors, pour tout $Q \in \mathbb{K}_{q-1}[X]$, on a :

$$Q(X) = \sum_{k=1}^{q} Q(\lambda_k) L_k(X)$$

En appliquant cette propriété avec le polynôme constant $Q = 1$, on en déduit que $1 = \sum_{k=1}^{q} L_k(X)$ et donc, en considérant les polynômes de l'endomorphisme u associés :

$$\mathrm{id}_E = \sum_{k=1}^{q} L_k(u)$$

On a donc :

$$E = \sum_{k=1}^{q} \mathrm{Im}\, L_k(u)$$

- Montrons maintenant que :

$$\mathrm{Im}\, L_k(u) \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda_k \mathrm{id}_E)$$

c'est-à-dire :

$$(u - \lambda_k \mathrm{id}_E) \circ L_k(u) = 0$$

On sait que :

$$\begin{aligned} (u - \lambda_k \mathrm{id}_E) \circ L_k(u) &= ((X - \lambda_k) L_k)(u) \\ &= \alpha\, P(u) \\ &\quad \text{seul le coefficient dominant diffère} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- On en déduit que :

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=1}^{q} \mathrm{Im}\, L_k(u) \\ &\subset \sum_{k=1}^{q} \mathrm{Ker}(u - \lambda_k \mathrm{id}_E) \subset E \end{aligned}$$

et donc l'égalité :

$$E = \sum_{k=1}^{q} \mathrm{Ker}(u - \lambda_k \mathrm{id}_E)$$

En ne conservant dans cette somme que les termes non nuls (c'est-à-dire ceux pour lesquels $\mathrm{Ker}(u - \lambda_k \mathrm{id}_E)$ est vraiment un espace propre, de dimension $\geqslant 1$), on a décomposé E comme somme de sous-espaces propres de E, ce qui prouve que u est diagonalisable.

5.3 Une démonstration de la caractérisation de trigonalisabilité

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose u trigonalisable. Dans une base de trigonalisation $\mathcal{B}$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

En notant A cette matrice, on a :

$$\chi_u(X) = \chi_A(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$$

qui est bien scindé.

$\boxed{\Leftarrow}$ On raisonne par récurrence sur n, la dimension de E.

- Si E est de dimension 1, le résultat est évident.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé. On suppose que le résultat est vrai dans un espace de dimension n.

Soit alors E un espace de dimension $n+1$, et $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé. On note λ l'une des racines de χ_u, qui est une valeur propre de u, et e_1 un vecteur propre associé à λ. On complète la famille libre (e_1) en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$ de E, dans laquelle la matrice de u est donnée par blocs :

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)}_{\text{notée } A} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & B \\ \hline 0 & \\ \vdots & C \\ 0 & \end{array}\right)$$

Notons $F = \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_{n+1})$, de dimension n, et p le projecteur sur F de direction $\mathrm{Vect}(e_1)$.

Par les propriétés des calculs des déterminants pour les matrices triangulaires par blocs, on a :

$$\chi_u(X) = \chi_A(X) = (X - \lambda)\chi_C(X)$$

où C est la matrice de $p \circ u_F \in \mathcal{L}(F)$. Par hypothèse, χ_u est scindé donc χ_C l'est aussi, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $p \circ u_F$. Il existe une base $(e'_2, \dots, e'_{n+2})$ de F dans laquelle la matrice de $p \circ u_F$ est triangulaire supérieure.

On note $\mathcal{B}' = (e_1, e'_2, \dots, e'_{n+1})$. Il reste simplement à vérifier que dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice de u est triangulaire supérieure.

Pour $k \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} u(e'_k) &= \alpha_k e_1 + p \circ u(e'_k) \\ &\text{en décomposant selon } \mathrm{Vect}(e_1) \oplus F \\ &= \alpha_k e_1 + \mathrm{CL}(e'_2, \dots, e'_k) \\ &\text{car } (e'_2, \dots, e'_{n+1}) \text{ est une base} \\ &\qquad \text{de trigonalisation de } p \circ u \end{aligned}$$

ce qui prouve que la matrice de u dans $\mathcal{B}'$ est triangulaire supérieure.

- Par le principe du raisonnement par récurrence, le résultat est donc vrai dans tout espace de dimension finie.

Exercices de mathématiques

Diagonalisation et utilisation - calculs

103.6

Diagonaliser :

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\0&2&0\\1&-1&3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-1&-3&4\\-2&-2&4\\-2&-3&5\end{pmatrix}$$

103.7

Les matrices $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\2&1&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&2&0\end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont-elles semblables ?

103.8

On considère :

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

Donner le rang et l'image de A. Est-elle diagonalisable ? Donner les dimensions de ses espaces propres.

Endomorphismes de matrices, de polynômes, d'endomorphismes

103.9

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, p un projecteur fixé de E et $\phi\,:\,\mathcal{L}(E)\to\mathcal{L}(E)$ définie par :

$$\phi(f)=\frac{1}{2}(f\circ p+p\circ f)$$

(a) ϕ est-elle linéaire ?

(b) ϕ est-elle diagonalisable ?

(c) Quelle est la dimension des sous-espaces propres de ϕ ?

103.10

Pour $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $f(M)=\begin{pmatrix}d&a\\b&c\end{pmatrix}$. f est-elle diagonalisable ?

103.11

L'endomorphisme ϕ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\phi(M)=M+\mathrm{tr}(M)I_n$$

est-il diagonalisable ?

103.12

Montrer que g, défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$g(P)(X)=n^2XP(X)-(X^2+X)P'(X)-X^3P''(X)$$

est un endomorphisme. Est-il diagonalisable ? Est-il injectif ?

Équations matricielles

103.13

Soit $n\in\mathbb{N}$; résoudre l'équation $M^n=\begin{pmatrix}2&3\\4&6\end{pmatrix}$, d'inconnue $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

103.14

(a) On pose $A=\begin{pmatrix}2&1\\4&-1\end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

(b) Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et en déduire l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

Autres

103.15

Résoudre, le système différentiel $\begin{cases} x' = 2x + y + 3z \\ y' = 2y \\ z' = x \end{cases}$

103.16

Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$

103.17

(a) Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. L'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est-elle continue ?

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice à coefficients entiers, telle que $4A^3 + 2A^2 + A = 0$. Montrer que la suite $(A^k)_k$ converge. En déduire que $A = 0$.

103.18

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si sa valeur propre est 0.

(b) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles qu'il existe $n+1$ valeurs μ pour lesquelles $A + \mu B$ est nilpotente. Montrer que A et B sont nilpotentes.

103.19

(a) On note $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que M est diagonalisable et diagonaliser M.

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}$.
Montrer que B est semblable à C.
Établir que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

103.20

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) La matrice A est-elle diagonalisable ?

(b) Soit $B = I_3 - A$. Trouver $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que (B^2X, BX, X) soit une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En déduire une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire.

103.21

Soit $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer le polynôme caractéristique de A.

(b) Est-ce que A est diagonalisable ?

(c) Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

103.22

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$ et f l'endomorphisme de E tel que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que f n'a qu'une seule valeur propre λ et que son sous-espace propre associé $E_\lambda(f)$ est de dimension 1. On exprimera E_λ sous la forme $E_\lambda = \mathrm{Vect}(u_1)$.

(b) Déterminer $E' = \mathrm{Ker}((f - \lambda \mathrm{id}_E)^2)$.

(c) Déterminer un vecteur u_2 tel que $u_2 \in E' \smallsetminus E_\lambda$. Que peut-on dire de la famille (u_1, u_2) ?

(d) Déterminer une base $\mathcal{C}$ de E dans laquelle la matrice de f soit triangulaire supérieure.

Petits problèmes d'entrainement

✍ **103.23**

(a) Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Trouver deux matrices A et B telles que :

$$\forall n \geqslant 1 \ M^n = 14^{\frac{n}{2}}(A + (-1)^n B).$$

(c) Déterminer le commutant de M (c'est-à-dire l'ensemble des matrices qui commutent avec M) et sa dimension. En déduire les solutions de l'équation $X^2 = M$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

✍ **103.24**

Soient n un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

(a) Montrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant au voisinage de 0

$$\sqrt{1+x} = P_n(x) + O(x^n)$$

(b) Etablir que X^n divise alors le polynôme $P_n^2(X) - X - 1$.

(c) Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^n = 0$.
Montrer qu'il existe un endomorphisme g de E vérifiant

$$g^2 = \mathrm{Id}_E + f$$

(d) Soit maintenant f un endomorphisme de E ne possédant qu'une valeur propre λ, non nulle.
Montrer que $(f - \lambda \mathrm{Id}_E)^n = 0$ et conclure qu'il existe un endomorphisme g de E vérifiant

$$g^2 = f$$

103.25

(a) Soit f une endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et A sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On suppose que λ est une valeur propre non réelle de A et que $Z \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre associé.
On note X et Y les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont les composantes sont respectivement les parties réelles et imaginaires des composantes de Z.

a1. Montrer que X et Y sont non colinéaires.

a2. Montrer que $\mathrm{Vect}(X, Y)$ est stable par f.

(b) On suppose que la matrice de f est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b1. Déterminer deux plans stables par f.

b2. Déterminer tous les plans stables par f.

103.26

(a) Soit u un endomorphisme inversible d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant

$$u^{-1} = Q(u)$$

(b) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui envoie le polynôme $P(X)$ sur $P(2X)$.
Montrer que u est un automorphisme et déterminer ses éléments propres.
Existe-t-il $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$u^{-1} = Q(u)\,?$$

103.27

Soit quatre suites réelles satisfaisant :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{5}(2u_n + v_n + w_n + x_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + 2v_n + w_n + x_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + v_n + 2w_n + x_n) \\ x_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + v_n + w_n + 2x_n) \end{cases}$$

(a) Déterminer la matrice A décrivant la récurrence.
On pose $B = 5A$. B est-elle diagonalisable ?

(b) Montrer que 1 est valeur propre de A. Quelles sont les autres ? Déterminer la dimension des espaces propres.

(c) Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de B.

(d) En déduire qu'il existe deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que, pour tout n, $B^n = a_n B + b_n I$.

(e) Étudier les suites $\left(\dfrac{a_n}{5^n}\right)_n$ et $\left(\dfrac{b_n}{5^n}\right)_n$.

(f) Étudier les suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(w_n)_n$ et $(x_n)_n$.

103.28

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante, où $n \geqslant 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(a) On souhaite dans cette question déterminer les valeurs propres de A.

a1. Quel est le rang de A ?

a2. Calculer A^2.

a3. Justifier que 0 est valeur propre d'ordre au moins $n-2$.

a4. En notant λ_1 et λ_2 les deux autres valeurs propres (éventuellement nulle, égales, complexes), donner $\lambda_1 + \lambda_2$ et $\lambda_1\lambda_2$.

a5. En déduire $\mathrm{Sp}(A)$.

(b) Déterminer une CNS pour avoir $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{Z}$.

(c) Démontrer que, pour tout $k \geqslant 3$, il existe λ_k, μ_k tels que :

$$A^k = \lambda_k A + \mu_k A^2$$

103.29

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $p \geqslant 1$, u et v deux endomorphismes de E tels que :

$$u \circ v - v \circ u = u$$

(a) Montrer que $\operatorname{tr}(u) = 0$.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u^n \circ v - v \circ u^n = nu^n$$

(c) Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $\psi(f) = f \circ v - v \circ f$. Montrer que $\psi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.

(d) Utiliser ψ et ses éléments propres pour montrer que u est nilpotent.

103.30

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer le rang de A. En déduire sans calcul le polynôme caractéristique de A. A est-elle diagonalisable ?

(b) Donner les éléments propres de A.

103.31

Soient

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$$

et $m \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$ canoniquement associé à M.

(a) En procédant à un calcul par bloc, déterminer $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $M^p = I_5$.
En déduire que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{C})$.

(b) Déterminer un vecteur $x \in \mathbb{R}^5$ tel que la famille :

$$(x, m(x), m^2(x), m^3(x), m^4(x))$$

forme une base de $\mathbb{R}^5$.
Quelle est la matrice de m dans cette base ?

103.32

Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. On note C_f l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f.

(a) Montrer que C_f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

(b) Montrer qu'un endomorphisme g appartient à C_f si et seulement si chaque sous-espace propre de f est stable par g.

(c) En déduire que :

$$\dim C_f = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \alpha_\lambda^2$$

où α_λ est la multiplicité de la valeur propre λ.

(d) On suppose que les valeurs propres de f sont simples. Montrer que $(\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est une base de C_f.

103.33

Soit E un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on note $(\alpha_i(\lambda))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les racines n-ièmes de λ. On note $(L_i(X))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les polynômes annulateurs de Lagrange associés aux $\alpha_i(\lambda)$.

(a) Montrer que u diagonalisable implique u^n diagonalisable. Que penser de la réciproque ?

(b) Montrer que $\sum_{i=1}^{n} L_i = 1$. En déduire $\mathrm{Ker}(u^n - \lambda \mathrm{Id}_E) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(u - \alpha_i(\lambda)\mathrm{Id}_E)$.

(c) Montrer que si u est inversible, alors u^n diagonalisable implique u diagonalisable.

103.34

Soit n un entier $\geqslant 2$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme de rang 1.

(a) Justifier que 0 est valeur propre de f et préciser la dimension de $E_0(f)$. En déduire que f est trigonalisable.

(b) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(f) \neq 0$.

(c) En déduire que $f^2 = \mathrm{tr}(f) f$.

103.35

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonalisable et vérifiant :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset]-1, 1[$$

Montrer que $A^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

(b) Même question dans le cas où A est seulement trigonalisable. *(On pourra faire une récurrence sur p.)*

103.36

Soit $n \geqslant 2$, et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On s'intéresse à l'équation $(E) : Z^2 = M$, d'inconnue $Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) On suppose que toutes les valeurs propres de M sont simples. Calculer le nombre de solutions de l'équation (E).

(b) Donner l'exemple d'une matrice M pour laquelle l'équation (E) admet une infinité de solutions.

(c) Si $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que (E) n'admet aucune solution.

103.37

(a) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a1. Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.

a2. Déterminer la matrice de passage P de la base initiale à la base de vecteurs propres, puis sa matrice inverse P^{-1}.

(b) On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + y - z + t \\ y' = 2y + z + 1 \\ z' = 3z \end{cases}$ x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$. Résoudre ce système différentiel en utilisant la question 1.