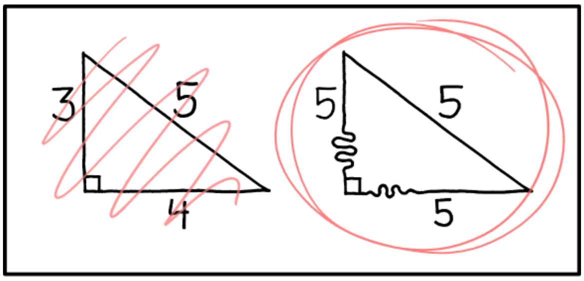
Espaces préhilbertiens réels

Cours 3

Exercices 13

Pour bien démarrer

1. Qu'est-ce qu'un produit scalaire ?
2. Qu'est-ce qu'une norme ? Lien entre produit scalaire et norme ?
3. Donner des exemples de produits scalaires et de normes.
4. Qu'est-ce que l'inégalité de Cauchy-Schwarz ?
5. Expression du produit scalaire dans une b.o.n. $(e_1, \ldots, e_n)$. Et la norme ?
6. Expression des coordonnées du vecteur x dans cette b.o.n. ?
7. Comment définit-on deux vecteurs orthogonaux ? Et l'orthogonal d'un sev ?
8. Méthodes pour montrer qu'une famille de vecteurs est libre ?
9. Qu'est-ce que le théorème de Pythagore ?
10. Si a est un vecteur non nul, comment construire un vecteur unitaire colinéaire à a ?
11. Expression du projeté orthogonal du vecteur x sur la droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}(a)$?
12. Soit F un sev dont on connaît une b.o.n. $(e_1, \ldots, e_q)$; expression du projeté orthogonal de x sur F ?
13. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt ?



HUGE GEOMETRY BREAKTHROUGH: TURNS OUT THOSE LINES WE MAKE TRIANGLES OUT OF ARE BENDY!

https://xkcd.com/2706

Lu dans le programme officiel

Pas de produit scalaire sur les $\mathbb{C}$-e.v., rien sur le dual, pas de séries de Fourier.

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Il s'agit essentiellement de résultats déjà vus en première année, mais qui sont au programme de PSI.

1 Produit scalaire et norme associée

1.1 Produit scalaire

Définition. On appelle **produit scalaire** sur E une forme bilinéaire, symétrique, positive et définie-positive sur E, c'est-à-dire, en notant φ cette application :

- φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- φ est linéaire par rapport à chacune de ses deux variables ;
- $\forall x, y \in E$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;
- $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) \geqslant 0$;
- $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$.

Remarque. *La symétrie et la linéarité par rapport à l'une des variables suffit à justifier la bilinéarité.*

Notation. On note en général $\langle x, y\rangle$, $(x|y)$ ou $x \cdot y$ le produit scalaire de x avec y.

Définition. Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire, s'appelle un **espace préhilbertien**. S'il est en plus de dimension finie, on dit que c'est un **espace euclidien**.

1.2 Exemples de référence

Remarque. *Les exemples de cette section figurent explicitement au programme, et peuvent donc être utilisés directement.*

Définition. Sur $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Définition. Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B)$$

Si $A = (a_{ij})_{ij}$ et $B = (b_{ij})_{ij}$, on a de plus l'expression :

$$\langle A, B\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij} b_{ij}$$

Il s'agit donc de la somme des produits terme à terme des deux matrices.

Définition. Sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition. Les produits scalaires définis ci-avant sont bien des produits scalaires.

1.3 Autres exemples

Remarque. *Même s'ils sont très classiques, les exemples de cette section ne figurent pas explicitement au programme.*

Définition. Sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle X, Y \rangle = X^\top Y$$

Remarque. *Il coïncide avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, via l'identification usuelle entre une matrice colonne et un n-uplet.*
On trouve parfois la définition $\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}(X^\top Y)$. En effet, on a $X^\top Y \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. La trace permet ici d'en faire un réel plutôt qu'une matrice 1×1. On accepte cependant souvent de confondre $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

Exemple. En confondant polynôme et fonction polynomiale associée, $\mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple. Sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, avec m une fonction continue et strictement positive, on peut définir un autre produit scalaire en posant :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)m(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple. Soit w une fonction continue, à valeurs strictement positives sur un intervalle I. On note :

$$E = \{f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \text{ t.q. } f^2 w \text{ intégrable sur } I\}$$

C'est un espace vectoriel, que l'on peut munir d'un produit scalaire en posant :

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(t)g(t)w(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition. Les produits scalaires définis ci-avant sont bien des produits scalaires.

1.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

> Pour tout $x, y \in E$, on a :
> $$|\langle x, y \rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}$$
> L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires.

Remarque. *On notera $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ la norme associée au produit scalaire. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'interprète bien géométriquement.*

Inégalité de Minkowski. Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens (on dit parfois *positivement liés*).

Remarque. *Avec $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, l'inégalité de Minkowski n'est rien d'autre que l'inégalité triangulaire sur la norme euclidienne.*

1.5 Norme euclidienne

Définition. On appelle **norme euclidienne** associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'application :

$$\| \cdot \| \ : \ x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Proposition. C'est une norme.
Définition. Un vecteur de norme 1 est qualifié d'**unitaire**.
Proposition. Si E est muni de sa norme euclidienne, le produit scalaire est continu sur $E \times E$.

1.6 Identités remarquables

Proposition. On a les identités remarquables suivantes :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \qquad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle$$

les identités de polarisation :

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \qquad \langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

et l'identité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

2 Orthogonalité

2.1 Vecteurs orthogonaux

Définition. Deux vecteurs x et y sont dits **orthogonaux** si et seulement si :

$$\langle x, y\rangle = 0$$

On note dans ce cas : $x \perp y$.
Remarque. *Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de E, et un vecteur orthogonal à tous les vecteurs de E est nul.*
Définition. Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On dit qu'ils sont **orthogonaux** si et seulement si :

$$\forall x_1 \in F_1,\ x_2 \in F_2,\ x_1 \perp x_2$$

On note dans ce cas : $F_1 \perp F_2$.
Définition. Une famille $(v_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite **orthogonale** si et seulement si :

$$\forall i, j \in I,\ i \neq j \implies \langle v_i, v_j\rangle = 0$$

Elle est dite **orthonormée** si et seulement si :

$$\forall i, j \in I,\ \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Proposition. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
Toute famille orthonormée est libre.
Exemple. Les polynômes élémentaires de Lagrange forment une famille libre.
Théorème de Pythagore.

x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Cas d'une famille finie de vecteurs. Si $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille orthogonale, alors $\left\| \sum\limits_{i=1}^{p} v_i \right\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{p} \|v_i\|^2$.

2.2 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle **orthogonal de** F l'ensemble :

$$F^{\perp} = \{x \in E \text{ t.q. } \forall y \in F,\ x \perp y\}$$

Proposition. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

- $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $\{0\}^{\perp} = E$, $E^{\perp} = \{0\}$, $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.
- $F \subset G \implies G^{\perp} \subset F^{\perp}$.
- $F \cap F^{\perp} = \{0\}$: F et $F^{\perp}$ sont en somme directe.
- Si $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de F, x est orthogonal à F si et seulement si il est orthogonal à chaque vecteur de $\mathcal{B}$.

Remarque. *On peut en fait définir $A^{\perp}$ pour toute partie A de E. C'est toujours un sous-espace vectoriel de E.*
Remarque. *$F \perp G$ ne signifie pas que $G = F^{\perp}$, mais seulement une inclusion.*

3 Bases orthonormées d'un espace euclidien

Dans cette section, E est un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

3.1 Existence de bases orthonormées

Définition. On appelle **base orthonormée** de E toute base de E qui soit aussi une famille orthonormée.
Proposition. Toute famille orthonormée de n vecteurs, lorsque $n = \dim E$, est une base orthonormée.
Théorème.

Tout espace euclidien admet au moins une base orthonormée.

Remarque. *On verra au § 4.4 un algorithme de construction d'une telle base.*
Exemple. Avec le produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la famille :

$$\left((E_{ii})_{1 \leqslant i \leqslant n}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij} + E_{ji}) \right)_{1 \leqslant i < j \leqslant n}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij} - E_{ji}) \right)_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \right)$$

est une base orthonormée.

3.2 Construction de bases orthonormées

Voir l'algorithme de Gram-Schmidt au § 4.4.

3.3 Coordonnées dans une base orthonormée

Proposition. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, et x un vecteur de E. Ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont : $\begin{pmatrix} \langle e_1, x\rangle \\ \vdots \\ \langle e_n, x\rangle \end{pmatrix}$, c'est-à-dire :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle e_i$$

Remarque. *Si la base n'est qu'orthogonale, il faut adapter la formule en normant les vecteurs. Si la base n'est pas orthonormée, il n'y a pas d'expression simple des coordonnées à l'aide du produit scalaire.*

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, x et y deux vecteurs dont les coordonnées sont respectivement $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors :

$$\langle x, y\rangle = X^\top Y \qquad \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\|x\| = \sqrt{X^\top X} \qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Remarque. *On voit ici l'avantage des bases orthonormées : les formules de calcul du produit scalaire et de la norme sont celles du produit scalaire et de la norme canonique de $\mathbb{R}^n$.*

Proposition. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $M = (m_{ij})_{ij}$ la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$. Alors, pour tout i, j :

$$m_{ij} = \langle e_i, u(e_j)\rangle$$

4 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

4.1 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie

Proposition. Soit E un espace préhilbertien, et F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E :

$$E = F \oplus F^\perp$$

On appelle $F^\perp$ le **supplémentaire orthogonal** de F, et on note parfois $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$.

Remarque. *Le résultat est faux en général lorsque F est de dimension infinie.*

Corollaire. Si E est un espace euclidien, tout sous-espace vectoriel F admet un supplémentaire orthogonal, et on a :

$$\dim E = \dim F + \dim F^\perp$$

Théorème de la base orthonormée incomplète.

Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille orthonormée de E euclidien de dimension n, on peut la compléter en une base orthonormée $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E.

Exemple. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4.2 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E. On appelle **projection orthogonale sur** F, et on note p_F, la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Remarque. *Rappelons que, par définition, $p_F(x)$ est l'unique vecteur y tel que :*

$$\begin{cases} y \in F \\ y - x \in F^\perp \end{cases}$$

Ceci fournit une méthode de détermination de $p_F(x)$ par résolution d'un système linéaire lorsque l'on connaît une famille génératrice de F.

Proposition. Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F, alors :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle e_i, x \rangle e_i$$

Remarque. *Ceci fournit une seconde méthode de détermination de $p_F(x)$, lorsque l'on connaît une base orthonormée de F.*

Inégalité de Bessel. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, alors :

$$\|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$$

Exemple. Soit $a \in E$ un vecteur non nul. Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(a)$, et celle sur $\mathrm{Vect}(a)^\perp$.

Exemple. Dans $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer le projeté orthogonal de $t \mapsto t^2$ sur $F = \mathrm{Vect}(t \mapsto 1, t \mapsto t)$.

4.3 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de E, et $x \in E$. On appelle **distance de x à F** la quantité :

$$d(x, F) = \operatorname*{Inf}_{y \in F} \|x - y\|$$

Théorème.

Si F est de dimension finie, alors le projeté orthogonal de x sur F est l'unique vecteur de F qui réalise la distance précédente :
C'est l'unique $y_0 \in F$ tel que :

$$\|x - y_0\| = \operatorname*{Min}_{y \in F} \|x - y\|$$

Ainsi :

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2}$$

Exemple. Justifier l'existence et déterminer :

$$\operatorname*{Inf}_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 \,\mathrm{d}t$$

4.4 Algorithme d'orthonorméisation de Gram-Schmidt

Partant d'une famille $(u_1, \dots, u_p)$ supposée libre de E (par exemple une base), on construit une famille $(e_1, \dots, e_p)$ telle que :

- $(e_1, \dots, e_p)$ est orthonormée ;
- $\forall k \in \{1, \dots, p\},\ \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$;
- $\forall k \in \{1, \dots, p\},\ \langle e_k, v_k \rangle > 0$.

Pour cela, on applique l'algorithme suivant : Pour chaque $k \in \{1, \dots, p\}$, on définit $e'_k = u_k - p_{k-1}(u_k)$ (où p_{k-1} désigne la projection orthogonale sur $F_{k-1} = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$) et $e_k = \frac{e'_k}{\|e'_k\|}$. Comme F_{k-1} est connue par une base orthonormée, l'expression de la projection orthogonale est simple.

Remarque. *La matrice de la famille $(e_1, \dots, e_p)$ dans la base $(u_1, \dots, u_p)$ de F_p est triangulaire supérieure.*

Exemple. Déterminer une base orthonormée du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 0, -1, 1)$ et $u_3 = (0, 1, 1, 1)$.

Remarque. *Ce procédé peut s'implanter facilement en Python.*

5 Formes linéaires sur un espace euclidien

5.1 Représentation des formes linéaires

Théorème de représentation des formes linéaires.

> Soit φ une forme linéaire sur un espace euclidien E. Alors il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :
> $$\forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle a, x \rangle$$
> En d'autres termes, en dimension finie, toute forme linéaire peut être représentée à l'aide d'un produit scalaire.

Remarque. *Soit H un hyperplan. Alors il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$. On applique à φ le théorème précédent, et on a la définition suivante :*

Définition. Lorsque $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$, où $\varphi \neq 0$, le vecteur a est orthogonal à l'hyperplan $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$. On dit que a est un **vecteur normal** à H.

Remarque. *Les vecteurs orthogonaux à H sont alors les vecteurs colinéaires à a.*

Exemple. Qu'obtient-on en appliquant le théorème précédent à la forme linéaire :

$$\varphi_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(a) \end{array}$$

pour les produits scalaires usuels de $\mathbb{R}_n[X]$?

Corollaire. On conserve les notations précédentes.

Si E est muni d'une base orthonormée, et que a a pour coordonnées $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, alors une **équation de** H est donnée par :

$$x \in H \iff A^\top X = 0$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Remarque. *Dans l'espace usuel de dimension 3, les plans vectoriels ont des équations de la forme :*

$$ax + by + cz = 0$$

où $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *est un vecteur normal.*

5.2 Distance à un hyperplan, à une droite

Théorème.

Soit H un hyperplan de E, et a un vecteur normal de H. Alors pour tout $x \in E$, on a :

$$d(x, H) = \frac{|\langle a, x\rangle|}{\|a\|}$$

Soit D un droite vectorielle de E, dirigée par un vecteur a. Alors, pour tout $x \in E$, on a :

$$d^2(x, D) = \|x\|^2 - d^2(x, D^\perp)$$

Exemple. Déterminer la distance de $(1, 2, 3)$ au plan d'équation $x + y + z = 0$, dans l'espace euclidien usuel de dimension 3.

6 Exercices et résultats classiques à connaître

6.1 Étude du produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

104.1

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par :

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^\top B)$$

(a) Montrer que l'on définit bien un produit scalaire.

(b) Montrer que la base canonique $(E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(c) Vérifier que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.

(d) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$|\operatorname{tr} A| \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\operatorname{tr} A^\top A}$$

et préciser le cas d'égalité.

6.2 Polynômes de Legendre

104.2

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$, où $n \geqslant 1$.

(a) Vérifier que :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

définit un produit scalaire sur E.
On note $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ la base obtenue par orthonormalisation de la base $(1, X, \ldots, X^n)$.

(b) Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, on définit :

$$f_k(X) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}X^k}((X^2-1)^k)$$

b1. Déterminer le degré de f_k.

b2. Calculer $\langle X^i, f_k \rangle$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$ et $i \in \{0, \dots, k-1\}$.

b3. En déduire que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, il existe un λ_k tel que $f_k = \lambda_k e_k$.

6.3 Choisir un produit scalaire pour reconnaître une distance

104.3

Pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, calculer :

$$m_k = \operatorname*{Inf}_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (t^k - at - b)^2 \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$$

6.4 Calcul d'une distance avec le déterminant de Gram

104.4

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour $(u_1, \dots, u_p)$ famille de vecteurs de E, on note $G(u_1, \dots, u_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'indice i, j est $\langle u_i | u_j \rangle$.

(a) Montrer que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est liée si et seulement si $\det G(u_1, \dots, u_p) = 0$

(b) Montrer que, si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base d'un sous-espace vectoriel F de E, alors, pour tout $x \in E$:

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(e_1, \dots, e_p, x)}{\det G(e_1, \dots, e_p)}}$$

7 Compléments de cours

7.1 Complément : matrice d'un produit scalaire

Définition. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base quelconque d'un espace euclidien, on peut définir la **matrice du produit scalaire** relativement à $\mathcal{B}$ comme étant la matrice :

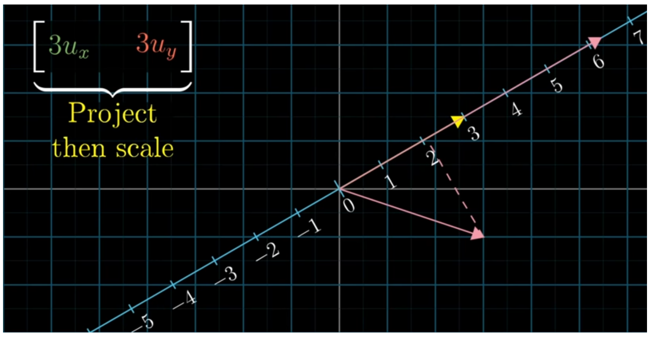
$$M = (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Remarque. *Avec les notations de la définition, la matrice M est symétrique. Mais toute matrice symétrique n'est pas la matrice d'un produit scalaire.*

Proposition. Avec les notations de la définition, et si x et y sont données par les matrices colonnes de leurs coordonnées, on a :

$$\langle x, y \rangle = X^\top M Y$$

7.2 Complement : one step in duality world



https://youtu.be/LyGKycYT2v0

Exercices de mathématiques

Produits scalaires

104.5

Sur $\mathbb{R}_2[X]$, on définit :

$$\langle P, Q\rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$$

(a) Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

(b) Trouver une base orthonormale (P_0, P_1, P_2) telle que $\deg(P_k) = k$.

(c) Déterminer la projection orthogonale de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.

104.6

Montrer que :

$$(P, Q) \mapsto \int_0^2 (2-t)P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ et en déterminer une base orthonormée.

104.7

Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on note :

$$\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + \int_{-1}^1 P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire, et déterminer une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.

104.8

(a) Montrer que $\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

(b) Calculer $d(X^2, \mathbb{R}_1[X])$.

Cauchy-Schwarz

104.9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$(|a_1| + \cdots + |a_n|)^2 \leqslant n\left(a_1^2 + \cdots + a_n^2\right)$$

Caractériser les cas d'égalité.

104.10

Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Orthogonal

104.11

Soit E un espace euclidien et F, G des sous-espaces vectoriels de E.

(a) Démontrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

(b) $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

104.12

Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire défini par :

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On note :

$$F = \{f \in E \text{ t.q. } \forall t \in [-1,0],\ f(t) = 0\}$$
$$\text{et } G = \{g \in E \text{ t.q. } \forall t \in [0,1],\ g(t) = 0\}$$

(a) Montrer que $F^\perp = G$.

(b) Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires ?

104.13

$\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Soit F le sous-espace vectoriel défini par :

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;/\; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

Déterminer la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale sur F.

104.14

(a) Montrer que le système $\begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x + 3y + z - t = 0 \end{cases}$ définit un plan P de $\mathbb{R}^4$.

(b) Construire une base orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de P.

(c) Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur P, puis de la symétrie orthogonale par rapport à P.

(d) Soit $v = (1, 1, 1, -1)$: calculer $d(v, P)$.

Distances

104.15

Calculer la valeur minimale de :

$$\int_0^1 (t \ln t - at - b)^2 \, \mathrm{d}t$$

et donner les valeurs de a et b pour lesquelles cette valeur est atteinte. On donnera une interprétation géométrique du résultat.

104.16

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, alors on pose $\langle A, A' \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$.

(a) Démontrer que $\langle \, , \, \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Petits problèmes d'entrainement

✍ **104.17**

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P, Q \in E$, on note :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$$

(a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

(b) Calculer, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $\langle X^n, 1 \rangle$ puis $\langle X^n, X^m \rangle$.

(c) Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

(d) Déterminer la projection orthogonale de X^4 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

(e) Calculer $d(X^4, \mathbb{R}_2[X])$.

✍ **104.18**

(a) Montrer qu'en posant, pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$:

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{\pi} P(\cos\theta)Q(\cos\theta) \, \mathrm{d}\theta$$

on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) On considère la suite de polynômes $(T_n)_n$ définie par :

$$T_0 = 1,\ T_1 = X,\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$:

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

(c) Montrer que, pour tout n, $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est orthogonale.

104.19

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $\varphi\ :\ E^2 \to \mathbb{R}$ qui à $X = (x, y, z), X' = (x', y', z')$ associe $\varphi(X, X') = (x + y + z)(x' + y' + z') + 2(y + 2z)(y' + 2z') + zz'$.

(a) Montrer que φ est un un produit scalaire sur E.

(b) Déterminer la matrice associée au produit scalaire φ relativement à la base canonique de E.

(c) Déterminer une base de E qui soit orthonormale pour ce produit scalaire.

104.20

(a) Montrer que $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme $U \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(0) = \int_{-1}^{1} P(x)U(x)\,\mathrm{d}x$$

(c) Calculer U lorsque $n = 2$.

104.21

On note $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P, Q \in E$, on définit :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que c'est un produit scalaire sur E.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$L_n = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}(X^n(1 - X)^n)$$

Montrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale.

(c) Calculer $\|L_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

104.22

On note E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. On définit sur $E \times E$ l'application φ par :

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 (fg + f'g')$$

On définit les deux ensembles :

$$\begin{array}{rcl} V & = & \{f \in E \text{ t.q. } f(0) = f(1) = 0\} \\ W & = & \{f \in E \text{ t.q. } f'' \text{ existe et } f'' = f\} \end{array}$$

(a) Montrer que φ est bien un produit scalaire sur E.

(b) Montrer que W est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, et en donner une base.

(c) Montrer que V est le supplémentaire orthogonal de W dans E. Donner l'expression de la projection orthogonale sur W.

(d) Pour $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, on définit :

$$E_{\alpha,\beta} = \{f \in E \text{ t.q. } f(0) = \alpha,\ f(1) = \beta\}$$

Calculer $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{f\in E_{\alpha,\beta}} \left(\int_0^1 (f^2 + f'^2)\right)$.

104.23

Sur $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Existe-t-il un élément $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \langle P, A\rangle = P(0)$$

104.24

On pose $E_n = \left\{P \in \mathbb{R}[X] / \ \forall Q \in \mathbb{R}_n[X],\ \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$.

(a) Montrer que E_n est un espace vectoriel.

(b) Montrer qu'il existe un unique polynôme P unitaire dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ appartenant à E_n.

(c) Montrer que P n'a que des racines simples et réelles, appartenant toutes à l'intervalle $]0, 1[$.

104.25

E est un espace euclidien de dimension n pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot\rangle$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0$$

Montrer que Ker u et Im u sont supplémentaires orthogonaux et que le rang de u est pair.

104.26

Soit a et b deux vecteurs unitaires d'un espace euclidien E. On note :

$$f\ :\ x \mapsto x - \langle a|x\rangle b$$

(a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

(b) À quelle condition f est-il bijectif ?

(c) Donner dans ce cas l'expression de f^{-1}.

(d) À quelle condition f est-il diagonalisable ?

104.27

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = \dfrac{1}{i+j-1}$. Montrer que $\det(A) > 0$.

104.28

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Soit $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ des réels.

(a) Montrer que $(P, Q) \in E^2 \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k)$ est un produit scalaire sur E.

(b) Soit $y_0, y_1, \ldots, y_n$ réels et $p \in \{0, \ldots, n\}$.
Montrer que :

$$\exists! S \in \mathbb{R}_p[X] \text{ t.q. } \sum_{k=0}^{n} (y_k - S(x_k))^2 = \operatorname*{Inf}_{P\in\mathbb{R}_p[X]} \sum_{k=0}^{n} (y_k - P(x_k))^2$$

On fera intervenir la projection orthogonale, au sens du produit scalaire ci-dessus, du polynôme d'interpolation de Lagrange, relatif au nuage de points $(x_k, y_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_p[X]$.

Ce polynôme S est appelé polynôme de meilleure approximation au sens des moindres carrés.