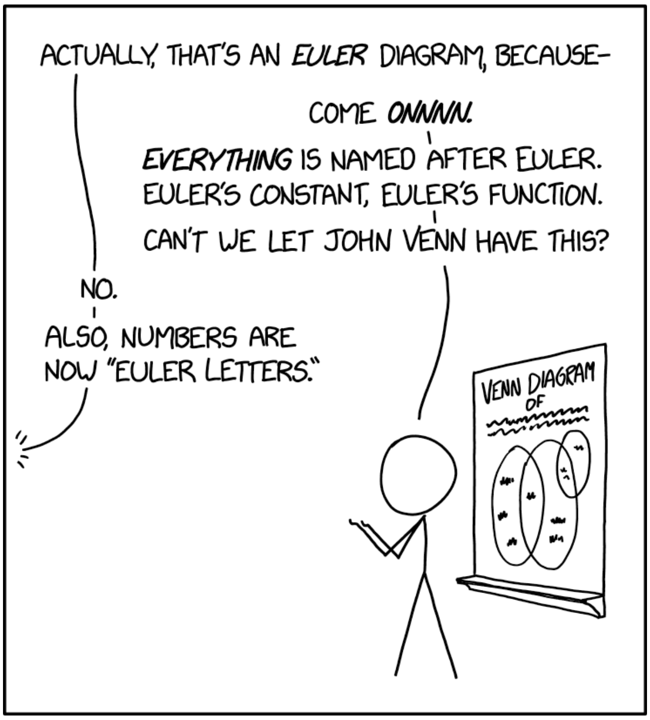
Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens



https://xkcd.com/2721

Lu dans le programme officiel

La notion d'adjoint est hors programme.
La démonstration du théorème spectral n'est pas exigible.

Dans ce chapitre, E désigne un espace euclidien, c'est-à-dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, de dimension finie n, muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

1 Isométries vectorielles et matrices orthogonales

1.1 Isométries vectorielles

Définition. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une **isométrie vectorielle** si et seulement s'il conserve la norme, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$$

Proposition. $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie vectorielle si et seulement s'il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

Proposition. Toute isométrie vectorielle est un automorphisme de E.

Remarque. *On parle d'isométrie car les distances sont préservées.*
On trouve aussi la dénomination ***automorphisme orthogonal*** *pour désigner les isométries vectorielles.*

Proposition. $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie vectorielle si et seulement si l'image d'une base orthonormée par u est une base orthonormée.

Définition. On note $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E. Muni de la loi $\circ$, c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$, appelé **groupe orthogonal de** E.

Exemple. Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles.
Les projecteurs orthogonaux ne sont pas, en général, des isométries vectorielles.

Proposition. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$. Alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{-1, 1\}$.

Proposition. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

Corollaire. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$, F un sous-espace vectoriel de dimension p stable par u. Alors la matrice M de u dans une base adaptée à la décomposition $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$ est diagonale par bloc :

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$.

Remarque. *Le résultat précédent s'applique en particulier lorsque $u \in \mathrm{O}(E)$, $\lambda \in \{-1, 1\}$ une valeur propre de u, et $F = E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$.*

1.2 Matrices orthogonales

Théorème.

> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et M la matrice de u dans une base orthonormée de E.
> Alors $u \in \mathrm{O}(E)$ si et seulement si $M^\top M = I_n$.

Définition. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est **orthogonale** si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé à M est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$.

Proposition. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Sont équivalentes :

(i) M est une matrice orthogonale ;

(ii) $M^\top M = I_n$;

(iii) M est inversible et $M^{-1} = M^\top$;

(*iv*) $MM^\top = I_n$;

(*v*) Les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;

(*vi*) Les lignes de M forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

Remarque. *En pratique, c'est le point* (v) *qui est le plus simple à rédiger.*
*Attention au vocabulaire : une matrice ortho**gonale** est une matrice dont les colonnes forment une base ortho**normée**.*

Corollaire. Un endomorphisme de E est une isométrie vectorielle si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est orthogonale.

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $\mathcal{B}'$ une famille à n vecteurs de E. Soit $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$. Alors $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée si et seulement si P est une matrice orthogonale.

Corollaire. Les matrices orthogonales sont les matrices de changement de bases orthonormées.

Définition. On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, ou parfois $\mathrm{O}(n)$, l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Muni de la loi $\times$, c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, appelé **groupe orthogonal d'ordre** n.

Proposition. Soit $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Alors $\det M = \pm 1$.

Définition. On note :

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \text{ t.q. } \det M = +1\}$$

C'est un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ appelé **groupe spécial orthogonal**. On trouve aussi la notation $\mathrm{SO}(n)$.

Remarque. *Si* $u \in \mathrm{O}(E)$, *alors* $\det u = \pm 1$. *On peut définir de même :*

$$\mathrm{SO}(E) = \{u \in \mathrm{O}(E) \textit{ t.q. } \det u = +1\}$$

*Ses éléments s'appellent les **isométries vectorielles directes** (ou positives), tandis que celles de déterminant* -1 *sont qualifiées d'**indirectes** (ou négatives).*

1.3 Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3

Dans ce paragraphe, on travaille dans un espace euclidien de dimension 2 ou 3.

1.3.1 Orientation

Définition. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ définissent **la même orientation** si et seulement si $\det P > 0$.

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ définissent **la même orientation** si et seulement si $P \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Remarque. *Deux bases orthonormées* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *définissent la même orientation si et seulement si :*

$$\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$$

Définition. **Orienter** l'espace, c'est choisir une base $\mathcal{B}$ et l'appeler **directe**. Les bases définissant la même orientation que $\mathcal{B}$ sont aussi appelées **directes**, les autres **indirectes**.
En dimension 2 et 3, les bases canoniques sont choisies pour être directes (sens trigonométrique, règle de la main droite).

1.3.2 Produit mixte

Définition. On appelle **produit mixte** d'une famille de 2 vecteurs (resp. 3 vecteurs) d'un espace euclidien de dimension 2 (resp. 3) le déterminant de cette famille dans une base orthonormée directe.
On note $[u, v]$ (resp. $[u, v, w]$) ce produit mixte.

Interprétation géométrique. *$[u,v]$ est l'aire algébrique du parallélogramme construit sur (u,v).*
$[u,v,w]$ est le volume algébrique du parallélépipède construit sur (u,v,w).

1.3.3 Produit vectoriel

Définition. Dans E espace vectoriel de dimension 3, on considère deux vecteurs u,v. On appelle **produit vectoriel de u par v**, et on note $u \wedge v$, l'unique vecteur tel que :

$$\forall w \in E,\ [u,v,w] = \langle u \wedge v, w\rangle$$

Proposition. Soit u,v deux vecteurs de E espace euclidien de dimension 3.

- $u \wedge v = 0$ si et seulement si (u,v) est liée.
- Si (u,v) est libre, alors $u \wedge v \in \mathrm{Vect}(u,v)^{\perp}$ et $(u,v,u\wedge v)$ est une base directe.

L'application $(u,v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire et antisymétrique (*i.e.* $u \wedge v = -v \wedge u$).
Remarque. *Le produit vectoriel est donc un outil commode pour construire un vecteur orthogonal à deux vecteurs donnés.*
On a aussi, si e_1, e_2 unitaires et orthogonaux, alors $(e_1, e_2, e_1 \wedge e_2)$ base orthonormée directe.
Calcul du produit vectoriel dans une base orthonormée directe. Soit $u\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ et $v\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$. Alors :

$$u \wedge v \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

1.3.4 Orientation d'un plan ou d'une droite dans un espace euclidien de dimension 3

Définition. **Orienter une droite** D dans l'espace euclidien de dimension 3, c'est choisir une base de D, c'est-à-dire un vecteur directeur (non nul) de D.
On dit que deux vecteurs u_1 **et** u_2 **définissent la même orientation de** D si et seulement si $\langle u_1, u_2\rangle > 0$.
Définition. **Orienter un plan** P dans l'espace euclidien de dimension 3, c'est choisir une base de P, c'est-à-dire un couple de vecteurs (u,v) non colinéaires de P.
On dit que deux bases (u_1, v_1) **et** (u_2, v_2) **définissent la même orientation de** P si et seulement si $\langle u_1 \wedge v_1, u_2 \wedge v_2\rangle > 0$.
Remarque. *Le choix d'une orientation de P revient donc à choisir un vecteur n non nul orthogonal à P.*

1.4 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Dans ce paragraphe, on travaille dans un espace euclidien E_2 de dimension 2.

1.4.1 Étude de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$

Proposition. Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est constitué des matrices :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

R_θ est appelée **matrice de rotation plane d'angle θ**.

Proposition. Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif et on a :

$$\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R},\ R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2}$$

Proposition. L'ensemble $\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est constitué des matrices :

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Proposition. $\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ n'est bien-sûr pas un groupe, et le produit n'est pas commutatif. On a cependant :

$$\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R},\ S_{\theta_1} S_{\theta_2} = R_{\theta_1-\theta_2}$$

1.4.2 Isométries vectorielles, angle

Proposition. Soit $u \in \mathrm{SO}(E_2)$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que, dans toute base orthonormée directe de E_2, la matrice de u soit R_θ.
On dit que u est la **rotation vectorielle d'angle θ**.

Remarque.

- *Il est remarquable que la matrice de u ne dépende pas de la base orthonormée directe choisie.*
- *θ n'est pas défini de façon unique, mais à 2π près. On dit que c'est une **mesure** de l'angle de la rotation.*
- *L'écriture complexe de la rotation vectorielle d'angle θ est :*

$$z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$$

Elle coïncide bien-sûr avec :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

lorsque $z = x + \mathrm{i}y$.

Proposition. La composée de deux rotations vectorielles, d'angles respectifs θ_1 et θ_2, est la rotation vectorielle d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

Remarque. *Si x, y sont deux vecteurs unitaires, alors il existe une unique rotation $u \in \mathrm{SO}(E_2)$ telle que $y = u(x)$.*
*Si x, y deux vecteurs non nuls, on peut alors appeler **mesure de l'angle orienté** (x, y) tout réel θ tel que la rotation d'angle θ envoie $\frac{x}{\|x\|}$ sur $\frac{y}{\|y\|}$.*

1.4.3 Classification des isométries vectorielles du plan euclidien

Proposition. Si $u \in \mathrm{SO}(E_2)$, et $u \neq \pm \mathrm{id}_E$, alors u n'est pas diagonalisable.
Si $u \in \mathrm{O}(E_2) \setminus \mathrm{SO}(E)$, alors u est diagonalisable et c'est la symétrie orthogonale par rapport à l'espace propre $E_1(u)$.

Théorème.

Soit $u \in \mathrm{O}(E_2)$. On note $\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ ses vecteurs invariants.

- Si $\dim \mathrm{Inv}(u) = 2$, alors $u = \mathrm{id}_E$.
- Si $\dim \mathrm{Inv}(u) = 1$, alors u est la réflexion d'axe $\mathrm{Inv}(u)$.
- Si $\dim \mathrm{Inv}(u) = 0$, alors u est une rotation (éventuellement $-\mathrm{id}_E$).

1.5 Isométries d'un espace euclidien de dimension 3

Dans ce paragraphe, on travaille dans un espace euclidien E_3 de dimension 3.

Proposition. Si $u \in \mathrm{SO}(E_3)$, alors il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E_3 et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que, par blocs :

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

u s'appelle la **rotation vectorielle d'axe dirigé et orienté par e_3, et d'angle θ**.

Détermination pratique de l'axe et de l'angle d'une rotation.
Soit $u \in \mathrm{SO}(E_3)$.

1. On vérifie que $u \in \mathrm{O}(E_3)$.
2. On vérifie que $u \in \mathrm{SO}(E_3)$.
3. On détermine l'axe de la rotation en déterminant $\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$.
   On choisit e_3 unitaire qui **dirige et oriente** cet axe.
4. L'angle θ de la rotation peut être déterminé **au signe près** en remarquant que :
   $$\mathrm{tr}\, u = 2\cos\theta + 1$$
5. Le signe de θ est déterminé en prenant e_1 unitaire et orthogonal à e_3, et en remarquant que :
   $$\sin\theta = \langle e_3 \wedge e_1, u(e_1) \rangle = [e_3, e_1, u(e_1)]$$

Exemple. Reconnaître les endomorphismes canoniquement associés à :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Remarque. *Si $u \in \mathrm{O}(E_3) \setminus \mathrm{SO}(E_3)$, on peut montrer que dans une base orthonormée directe bien choisie, la matrice de u est de la forme (par blocs) $\begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. u est donc la composée commutative d'une rotation d'axe $\mathrm{Vect}(e_3)$ et d'une réflexion de plan $\mathrm{Vect}(e_3)^\perp$.*
On peut aussi donner un théorème de classification des isométries vectorielles, basée sur la dimension de $\mathrm{Inv}(u)$.

2 Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques réelles

2.1 Endomorphismes autoadjoints

Définition. Dans E espace euclidien, on considère $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est un **endomorphisme autoadjoint** si et seulement si :

$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

On note $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E.

Remarque. *On trouve aussi la terminologie « endomorphismes symétriques » pour désigner les endomorphismes autoadjoints.*

Exemple. Les symétries orthogonales, les projections orthogonales sont des endomorphismes autoadjoints.
La transposition, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, est un endomorphisme autoadjoint.

Théorème.

> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, et $M = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$.
> L'endomorphisme u est autoadjoint si et seulement si M est une matrice symétrique, c'est-à-dire $M^\top = M$.

Remarque. *Il n'y a aucun résultat si on ne travaille pas dans une base orthonormée.*

2.2 Réduction des endomorphismes symétriques

Proposition.

- Soit M une matrice symétrique réelle. Alors χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$.
- Soit u un endomorphisme autoadjoint. Alors χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$.

Proposition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint de E et F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

Proposition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint de E. Alors ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, et sont donc en somme directe orthogonale.

Théorème spectral.

> Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres.

Remarque. *Il s'agit bien d'un théorème de diagonalisabilité : Si u un endomorphisme autoadjoint de E espace euclidien, alors :*

- *E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u.*
- *u est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.*

Corollaire. Pour toute matrice symétrique réelle A, il existe une matrice diagonale réelle D et une matrice orthogonale P telles que :

$$A = PDP^{-1} = PDP^\top$$

Remarque. *On note l'intérêt d'avoir une matrice de passage orthogonale : $P^{-1} = P^\top$.*

2.3 Endomorphismes autoadjoints positifs ou définis-positifs

Définition. Soit $u \in \mathscr{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint.

- On dit que u est **positif** si et seulement si $\forall x \in E$:

$$\langle u(x), x\rangle \geqslant 0$$

- On dit que u est **défini-positif** si et seulement si u est positif et :

$$\langle u(x), x\rangle = 0 \implies x = 0$$

On note $\mathscr{S}^+(E)$ (resp. $\mathscr{S}^{++}(E)$) l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs (resp. définis-positifs).

Remarque. *On peut aussi traduire que $u \in \mathscr{S}(E)$ est défini-positif par :*

$$\forall x \in E,\ x \neq 0 \implies \langle u(x), x\rangle > 0$$

Définition. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.

- On dit que S est **positive** si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:
$$X^\top SX \geqslant 0$$
- On dit que S est **définie-positive** si et seulement si elle est positive et :
$$X^\top SX = 0 \implies X = 0$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. définies-positives).

Remarque. *On ne parle de positivité que pour les endomorphismes autoadjoints (resp. pour les matrices symétriques réelles).*

Remarque. *Si $u \in \mathscr{S}^{++}(E)$, $\langle u(x), y\rangle$ définit un produit scalaire sur E.*
Si $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $X^\top MY$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Caractérisation spectrale.

Soit $u \in \mathscr{S}(E)$.

- u est positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$;
- u est défini-positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- S est positive si et seulement si $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$;
- S est définie-positive si et seulement si $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.

3 Exercices et résultats classiques à connaître

3.1 Caractérisation des symétries orthogonales, des projecteurs orthogonaux

105.1

Soit E espace euclidien.
Montrer que les projections orthogonales de E sont les projections qui sont des endomorphismes autoadjoints.

105.2

Soit E espace euclidien.
Montrer que les symétries orthogonales de E sont les isométries vectorielles qui sont des endomorphismes autoadjoints.

105.3

(a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S = A^\top A$ est une matrice symétrique positive.

(b) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Existe-t-il une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^\top A$? Donner une CNS sur S pour que A soit inversible.

3.2 Racine carrée d'une matrice symétrique

105.4

(a) Montrer que, pour toute matrice $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que :

$$S = R^2$$

(b) Montrer l'unicité de cette matrice R.

3.3 Décomposition polaire d'une matrice inversible

105.5

Montrer que toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ admet une **décomposition polaire** :

$$A = \Omega S$$

où $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

3.4 Matrice de Householder

105.6

Si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, on appelle **matrice de Householder** de V la matrice :

$$H_V = I_n - \frac{2}{\|V\|^2} VV^\top$$

Montrer que H_V est symétrique et orthogonale, et reconnaître l'endomorphisme qu'elle représente.

3.5 Matrice de Hilbert

105.7

On s'intéresse à la matrice **de Hilbert** $H = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

(a) Pour $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, exprimer $X^\top HX$.

(b) Montrer que H est une matrice symétrique, définie positive.
On écrira $\frac{1}{i+j-1}$ comme l'intégrale sur $[0,1]$ d'un polynôme simple.

3.6 Une formule variationnelle

105.8

Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. Montrer que :

$$\operatorname*{Sup}_{x\neq 0_E} \frac{\langle x, u(x)\rangle}{\|x\|^2} = \operatorname{Max}\operatorname{Sp}(u)$$

Exercices de mathématiques

105.9

Reconnaître les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ de matrice (relativement à la base canonique) :

a) $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ b) $B = \dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$

105.10

Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien usuel, déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F dont un système d'équations cartésiennes est $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+2y+3z+4t=0 \end{cases}$.

105.11

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice relativement à la base canonique est $A = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Reconnaître u.

105.12

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

(a) Justifier que A est diagonalisable.

(b) Déterminer P et D dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $P^\top = P^{-1}$, D est diagonale, et $P^\top AP = D$.

105.13

Montrer que l'endomorphisme p de $\mathbb{R}$, dont la matrice relativement à la base canonique est $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ est une projection orthogonale dont on déterminera l'image.

105.14

Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$; montrer que les valeurs propres complexes de M sont de module 1.

105.15

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 3$; soit (a,b) une famille libre de deux vecteurs unitaires de E.
Soit $f\ :\ x \in E \mapsto f(x) = \langle a,x\rangle a + \langle b,x\rangle b$.

(a) Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de E.

(b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

105.16

Soit $A = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ et calculer $\mathrm{rg}(A)$.

Petits problèmes d'entrainement

✍ **105.17**

Soit f une isométrie d'un espace euclidien E. On note Id l'application identique de E, $F = \mathrm{Ker}(f - Id)$ et G le sous-espace supplémentaire orthogonal de F.

(a) Montrer que, pour tout $x, y \in E$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

(b) Montrer que G est stable par f, et que la restriction de $\mathrm{Id} - f$ à G, notée g, est un automorphisme de G.

(c) On note $g_n = \dfrac{1}{n}\left(\mathrm{Id} + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}\right)$. Exprimer l'application $g_n \circ (\mathrm{Id} - f)$ en fonction de Id, f^n et n. En déduire que, pour tout $x \in G$, $g_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0_E$.

(d) Soit $x \in E$. Montrer que $g_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} p(x)$, où p est la projection orthogonale sur F.

(e) On pose $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer la limite, pour $n \to +\infty$, de :

$$\frac{1}{n}(I_3 + A + \cdots + A^{n-1})$$

✍ **105.18**

Soit $n \geqslant 3$, $E = \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, A et B deux colonnes non colinéaires dans E et :

$$M = AB^\top + BA^\top$$

(a) Justifier que M est diagonalisable.

(b) Déterminer $\mathrm{rg}(M)$ en fonction de A et B.

(c) Déterminer le spectre de M et décrire les sous-espaces propres associés.
On pourra commencer par le cas où (A, B) est une famille orthonormée.

105.19

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme u dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Sans calculs, dire pourquoi $\mathbb{R}^4$ possède une base orthonormée formée de vecteurs propres de A.

(b) Montrer que u est une isométrie vectorielle. En déduire les seules valeurs propres possibles pour u.

(c) Sans calculer le polynôme caractéristique de u, déterminer à l'aide de la trace l'ordre de multiplicité des valeurs propres de u. En déduire χ_u.

(d) Déterminer $E_1(u)$. En donner une base, puis appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt pour obtenir une base orthonormée de $E_1(u)$.

(e) Déterminer sans trop de calculs $E_{-1}(u)$.

(f) Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de u est diagonale. Reconnaître u.

105.20

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $I_3 + A$ est inversible.
b) On pose $M = (I_3 - A)(I_3 + A)^{-1}$. Montrer que $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \setminus \{I_3\}$.
c) Déterminer l'axe de la rotation associée à M.

105.21

Soit p un projecteur sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, de E espace préhilbertien réel. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

(i) p est un projecteur orthogonal.

(ii) $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$.

(iii) $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

105.22

Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes v_i et $W \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes toutes égales à 1. Trouver une condition pour que $M = I_n - VW^\top$ soit la matrice d'un projecteur.
Donner alors son noyau et son image.
Trouver V tel que ce projecteur soit orthogonal.

105.23

(a) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel, on considère r une rotation d'angle θ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $P(1) = 1$ et $\left|P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right| = 1$.
Montrer que $P(r)$ est une rotation.

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\frac{1}{3}(2A^2 - A + 2I_3)$ est un rotation. Déterminer son angle.

105.24

(a) Démontrer que l'application

$$(P,Q) \mapsto \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

définit un produit scalaire sur l'espace E des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n (n est un entier supérieur ou égal à 2).

(b) Démontrer que l'endomorphisme L de E défini par

$$L(P) = (X^2-1)P'' + (2X+1)P'$$

est autoadjoint pour le produit scalaire considéré.

105.25

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que M **a la propriété** (P) si et seulement s'il existe une matrice $U \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que M soit la sous-matrice de U obtenue en supprimant les dernières ligne et colonne de U, et que U soit une matrice orthogonale, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n+1} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$U = \begin{pmatrix} & & & \alpha_{2n+1} \\ & M & & \vdots \\ & & & \alpha_{n+2} \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n & \alpha_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{R})$$

(a) Ici, $M = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Déterminer une CNS portant sur les λ_i pour que M ait la propriété (P).

(b) Ici, $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Déterminer une CNS pour que M ait la propriété (P).

(c) Si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = US$.
On admettra qu'une telle décomposition existe encore lorsque M n'est pas inversible.

(d) Déterminer une CNS pour que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque ait la propriété (P). Cette condition portera sur $M^\top M$.

(e) Montrer le résultat admis à la question (c).

105.26

Soit A une matrice orthogonale carrée d'ordre n. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Exprimer $\sum_{i,j} a_{i,j}$ à l'aide de U et de A.

(b) En déduire :

$$\left|\sum_{i,j} a_{i,j}\right| \leqslant n \leqslant \sum_{i,j} |a_{i,j}|$$

105.27

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $A^\top A$ est symétrique, et que $\mathrm{Sp}(A^\top A) \subset \mathbb{R}_+$.

(b) Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de $A^\top A$. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^2$$

105.28

On étudie l'équation $MM^\top M = I_n$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer qu'une solution est une matrice symétrique.

(b) En déduire les solutions de l'équation étudiée.

105.29

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{S}(E)$ tel que $\mathrm{tr}(f) = 0$.

(a) Montrer qu'il existe au moins un vecteur x non nul de E qui est orthogonal à $f(x)$.

(b) Montrer qu'il existe une base orthonomée de E dans laquelle tous les coefficients diagonaux de la matrice de f soient nuls.

105.30

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

(a) Soit $u\ :\ P \mapsto \displaystyle\int_0^1 (X+t)^n P(t)\mathrm{d}t$: montrer que u est un endomorphisme autoadjoint de E.

(b) En déduire qu'il existe une base orthonormée $(P_0, \dots, P_n)$ de E formée de vecteurs propres de u. On note $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ les vp associées.

(c) Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x) P_k(y)$$

En déduire $\mathrm{tr}(u)$.

105.31

Soit E un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E.

(a) Montrer que l'application $a \mapsto \langle a, \cdot\rangle$ définie sur E est un isomorphisme de E sur $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

(b) Soit $x \in E$ fixé. Montrer qu'il existe un unique vecteur, noté $f^*(x)$, tel que :

$$\forall y \in E,\ \langle f(y), x\rangle = \langle y, f^*(x)\rangle$$

(c) Montrer que f^* est un endomorphisme de E.

(d) Déterminer image et noyau de f^* en fonction de ceux de f.

(e) Déterminer la matrice de f^* dans $\mathcal{B}$ en fonction de celle de f.