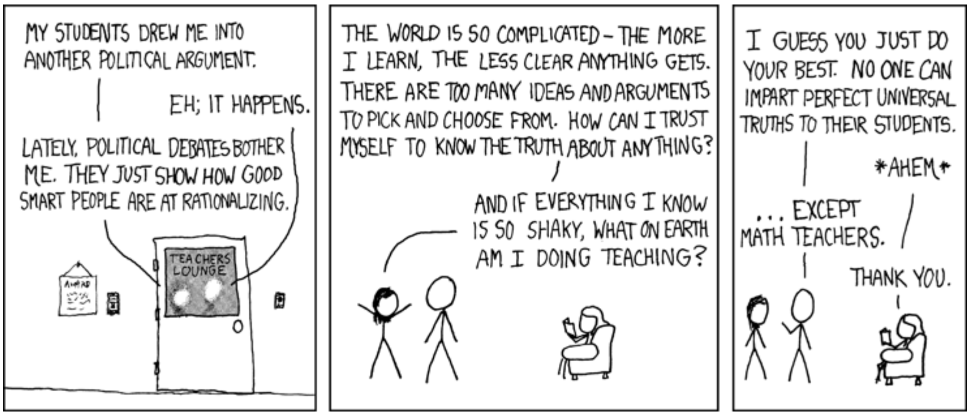
Fonctions d'une variable réelle

Cours 3

Exercices 11



https://xkcd.com/263

1 Fonctions usuelles

1. Quelles sont les fonctions usuelles ?
2. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Comment sont-elles définies ?
3. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? Leurs graphes ?
4. Comment utiliser le cercle trigonométrique ?

2 Analyse asymptotique

1. Ça sert à quoi, l'analyse asymptotique ?
2. Que signifie négligeable ? dominé ? équivalent ?
3. Être équivalent, c'est pareil qu'avoir la même limite ?
4. Opérations ?
5. Connaissez-vous les développements limités usuels ?

3 Continuité

1. Quels sont les théorèmes fondamentaux concernant l'existence de limite ?
2. Quels sont les théorèmes fondamentaux concernant la continuité des fonctions ?
3. Lipschitzien, ça veut dire quoi ?

4 Dérivabilité

1. Quels sont les théorèmes fondamentaux concernant la dérivabilité des fonctions ?
2. Y a-t-il des résultats concernant le calcul des dérivées ?
3. De classe $\mathcal{C}^2$, $\mathcal{C}^\infty$, comment c'est défini ? Comment on le montre ?
4. Y a-t-il beaucoup de fonctions lipschitziennes ?

5 Convexité

1. Qu'est-ce qu'un intervalle de $\mathbb{R}$?
2. Qu'est-ce qu'un segment $[AB]$ dans le plan ?
3. Que signifie « f est convexe » ?
4. Caractérisations, propriétés des fonctions convexes ?
5. Qu'est-ce qu'une fonction concave ?

6 Intégration sur un segment

1. Qu'est-ce qu'un segment ?
2. « Intégrale », « primitive », c'est pareil non ?
3. Peut-on dériver $x \mapsto \displaystyle\int_x^{3x^2} \operatorname{Arctan}^2(t)\,\mathrm{d}t$?
4. Quelles sont les techniques de calcul des intégrales ?
5. Quel est le résultat concernant les sommes de Riemann ?

7 Exercices et résultats classiques à connaître

7.1 Le produit des termes pairs

201.1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer à l'aide du symbole $\prod$ puis à l'aide de factorielles le produit :

$$p_n = 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2) \cdot (2n)$$

7.2 Une formule classique avec la fonction Arctan

201.2

Montrer que, pour tout $x > 0$:

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

Et pour $x < 0$?

7.3 Suite définie de façon implicite

201.3

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $x_n \in I_n = \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan x_n = x_n$.

(b) Montrer qu'il existe des réels a, b, c, d que l'on déterminera tels que :

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} a\,n + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

7.4 Prolongement $\mathcal{C}^\infty$

201.4

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

(b) En déduire que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donner les valeurs de $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7.5 Un calcul d'intégrale par changement de variable classique

201.5

On souhaite calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$.

(a) Peut-on factoriser x^2+x+1 ?

(b) Écrire x^2+x+1 comme la somme de deux carrés : $(x+\dots)^2+(\dots)^2$.

(c) En déduire un changement de variable permettant de faire apparaître $\displaystyle\int_{\dots}^{\dots} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$.

(d) En déduire la valeur de I.

7.6 Intégrales de Wallis

201.6

On appelle **intégrales de Wallis** les intégrales définies, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \,\mathrm{d}x$$

On note aussi $V_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x$.

(a) Démontrer que $W_n = V_n$. Calculer W_0 et W_1.

(b) Déterminer une relation liant W_n et W_{n-2} pour $n \geqslant 2$. En déduire l'expression de W_n.

(c) Démontrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, convergente vers un réel ℓ. Calculer $W_{2p}\times W_{2p+1}$ pour $p \in \mathbb{N}$. En déduire ℓ.

(d) Déterminer un équivalent de $(W_n)_n$.

(e) Utiliser $\frac{W_{2p+1}}{W_{2p}}$ pour montrer :

$$\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!\sqrt{p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \sqrt{\pi}$$

7.7 Lemme de Lebesgue

201.7

Soit $f\,:\,[a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que :

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exercices de mathématiques

Fonctions usuelles, nombres complexes

201.8

Déterminer les réels x tels que :

$$\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$$

201.9

(a) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kx)$

(b) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$

201.10

Étudier et représenter la fonction définie par :

$$f(x) = \text{Arcsin}\,\frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}$$

201.11

Résoudre l'équation :

$$\text{Arcsin}\,\frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{3}$$

201.12

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P_n = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n$.

(a) Justifier que P_n admet n racines éventuellement confondues dans $\mathbb{C}$.

(b) Préciser le produit et la somme de ces racines.

(c) Résoudre l'équation $P_n(z) = 0$ et contrôler la conformité avec le résultat de la question précédente.

(d) Déduire de $P(1)$ la valeur de $\prod\limits_{k=1}^{n} \sin \dfrac{k\pi}{n+1}$.

201.13

(a) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $z = a + \mathrm{i} \in \mathbb{C}$. On considère φ l'argument de z pris dans $]-\pi, \pi]$. Montrer que $\varphi = \text{Arctan}(1/a)$.
Que dire si $a \in \mathbb{R}_-^*$?

(b) À l'aide de ce qui précède, calculer $\text{Arctan}(1/2) + \text{Arctan}(1/3)$.

Analyse asymptotique

201.14

(a) Justifier l'équivalent $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$.

(b) Déterminer le développement limité de tan en 0 à l'ordre 3.

(c) Déterminer le développement limité de tan en 0 à l'ordre 5.

201.15

(a) Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^x$$

(b) Ce résultat est-il valable pour $x < 0$?

201.16

Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\operatorname{Arccos} x$.

201.17

Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x \to 0$:

(a) $\ln(1+\sin x)$

(b) $\ln(\ln(1+x))$

(c) $(\ln(1+x))^2 - (\ln(1-x))^2$.

201.18

Déterminer le développement asymptotique de :

$$f(x) = x\ln(x+1) - (x+1)\ln x$$

à la précision $\dfrac{1}{x^3}$ au voisinage de $+\infty$.

201.19

Déterminer la limite, pour $x \to \dfrac{\pi}{6}$, de $\left(\tan \dfrac{3x}{2}\right)^{\tan 3x}$.

201.20

Montrer que l'application $f\,:\,x \mapsto x\mathrm{e}^{x^2}$ admet une réciproque définie au voisinage de 0, et former le développement limité à l'ordre 5 de f^{-1}.

201.21

(a) Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de la fonction $f\,:\,x \mapsto \dfrac{\cos x}{1-x}$.

(b) Donner, pour $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$, la valeur de $f^{(k)}(0)$.

Continuite, dérivation,convexité

201.22

On considère $a = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$ et $f\,:\,\begin{array}{ccc}]-a\ a[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x^3) \end{array}$

On n'utilise pas dans cet exercice la fonction Arctan.

(a) Montrer que f admet une fonction réciproque g.

(b) Étudier la dérivabilité de g et exprimer, le cas échéant, la dérivée de g en fonction de g.

201.23

Soit f une application continue de $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$. Montrer qu'elle admet un point fixe.

201.24

Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose :

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$$

Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

201.25

Soit $f\,:\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I telle que $|f|$ est constante sur I. En déduire que f est constante sur I.

201.26

Soit $f\,:\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

On souhaite montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$.

(a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = nf(1)$. Montrer que ceci reste vrai pour $n \in \mathbb{Z}$.

(b) En déduire que, pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = rf(1)$.

(c) Conclure.

201.27

(a) Montrer que, pour tous réels x et y :

$$|\cos y - \cos x| \leqslant |y - x|$$

(b) Montrer que pour tout réel t :

$$|\sin t| \leqslant |t|$$

201.28

Montrer que pour tout $(x, y) \in [0, 1[^2$ tel que $x < y$, on a :

$$\frac{y - x}{\sqrt{1 - x^2}} < \arcsin y - \arcsin x < \frac{y - x}{\sqrt{1 - y^2}}$$

201.29

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \cos x + x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Démontrer que f admet en 0 un développement limité à l'ordre 2 que l'on écrira. f est-elle dérivable en 0 ? Est-elle deux fois dérivable en 0 ?

201.30

Montrer que : $\forall x \in [0, \pi]$, $\dfrac{2}{\pi} x \leqslant \sin x \leqslant x$.

201.31

En utilisant la notion de convexité, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$:

$$x^{n+1} - (n + 1)x + n \geqslant 0$$

201.32

(a) Déterminer l'ensemble de définition de $f = -\ln \circ \ln$.

(b) Montrer que f est convexe sur D_f.

(c) En déduire que, pour $x, y > 1$:

$$\ln\left(\frac{x + y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$$

Suite définie de façon implicite

201.33

(a) Montrer que l'équation $x^n + x^2 - 1 = 0$ admet une unique racine réelle strictement positive pour $n \geqslant 1$. On la note x_n.

(b) Déterminer la limite ℓ de la suite $(x_n)_n$, puis un équivalent de $x_n - \ell$.

Intégrales sur un segment

201.34

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \,\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_1^2 \ln t \,\mathrm{d}t \qquad I_3 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \,\mathrm{d}t$$

201.35

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2+\cos t}$

201.36

Soit $f \,:\, [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On définit $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que I_n tend vers 0.

(b) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $(n+1)I_n$ tend vers $f(1)$.

(c) Et si f n'est que continue ?

Fonctions définies par une intégrale

201.37

Déterminer : $\displaystyle\lim_{u\to 0} \int_u^{2u} \frac{\cos(x)}{x} \mathrm{d}x$

201.38

Soit Φ la fonction définie par la relation :

$$\Phi(x) = \int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin} \sqrt{t} \,\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos} \sqrt{t} \,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que Φ est bien définie sur $\mathbb{R}$, paire et π-périodique.

(b) Montrer que Φ est constante.

(c) En déduire la valeur des intégrales :

$$\int_0^1 \operatorname{Arccos} \sqrt{t} \,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^1 \operatorname{Arcsin} \sqrt{t} \,\mathrm{d}t$$

201.39

On considère la fonction :

$$f \,:\, x \mapsto \int_x^{2x} \frac{1}{t - \ln t} \,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et déterminer le sens des variations de f.

(b) Montrer que :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t-\ln t} - \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

En déduire que f possède une limite finie en $+\infty$ que l'on précisera.

(c) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et dérivable en 0 à droite.

(d) Donner l'allure de la courbe représentative de f.

201.40

Montrer qu'au voisinage de $+\infty$:

$$\int_{n^2}^{n^3} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \sim \frac{1}{n^2}$$

Sommes de Riemann

201.41

Déterminer les limites des suites de terme général suivant :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \qquad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$$

$$c_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}$$

201.42

Utiliser les sommes de Riemann pour déterminer la limite de :

$$\left(\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Petits problèmes d'entrainement

✍ **201.43**

On pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

(a) Justifier que :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(b) Déterminer la limite de $(S_n)_n$.

(c) On pose $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Montrer que $(u_n)_n$ converge.

(d) Donner un équivalent simple de S_n.

✍ **201.44**

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$

(a) Montrer que f se prolonge par continuité à $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $f(u_n) = 1 + \frac{1}{n}$.

(d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$.

(e) Déterminer un équivalent simple de u_n.

201.45

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Déterminer, pour n entier suffisamment grand, le module et un argument de $\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ en fonction de a, b et n.

(b) En déduire que :

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^z$$

201.46

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Utiliser le polynôme $(1+X)^n(1+X)^n$ pour donner une expression de S_n.

201.47

(a) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$I_n(f) = \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

Étudier la suite $(I_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Déterminer la limite de la suite $(nI_n(f))_n$. En déduire un équivalent de $I_n(f)$ si $f(1) \neq 0$.

(c) Soit $J_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln(1+x))^n\,\mathrm{d}x$. Déterminer un équivalent de J_n.

201.48

(a) Soit $\varphi : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\int_0^\pi \varphi(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$$

(b) Montrer que l'application f, définie sur $]0,\pi]$ par :

$$f(t) = \frac{\alpha t + \beta t^2}{\sin\frac{t}{2}}$$

est prolongeable par continuité à $[0,\pi]$ et que la fonction ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

(c) Montrer que, pour tout entier $N \geqslant 1$ et tout réel $t \in]0,\pi]$:

$$\sum_{n=1}^{N} \cos(nt) = \frac{\sin\frac{Nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\cos\frac{(N+1)t}{2}$$

(d) Déterminer deux réels α, β tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2)\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

(e) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

201.49

On pose :

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|,\ g(x) = \frac{x^3}{3(1-x^2)} \text{ et } h(x) = f(x) - g(x)$$

(a) Étudier f, g et h et tracer séparément leurs représentations graphiques.

(b) Monter que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1$$

(c) Monter que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(2n+1)g\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{12n(n+1)}$$

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!} \text{ et } v_n = u_n \exp\left(\frac{1}{12n}\right)$$

(d) À l'aide des résultats précédents, étudier la monotonie de la suite $(\ln u_n)_n$.

(e) Même question pour $(\ln v_n)_n$.

(f) Montrer que $(\ln u_n)_n$ et $(\ln v_n)_n$ sont adjacentes.

(g) Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent, ont la même limite > 0.

201.50

Calculer les limites, pour $n \to +\infty$, de :

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{1}{\sqrt{k+n}}$$

201.51

En trouvant deux manières de faire le développement limité de $(\mathrm{e}^x - 1)^n$, montrer que :

$$\forall m \leqslant n,\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m = \delta_{m,n} n!$$