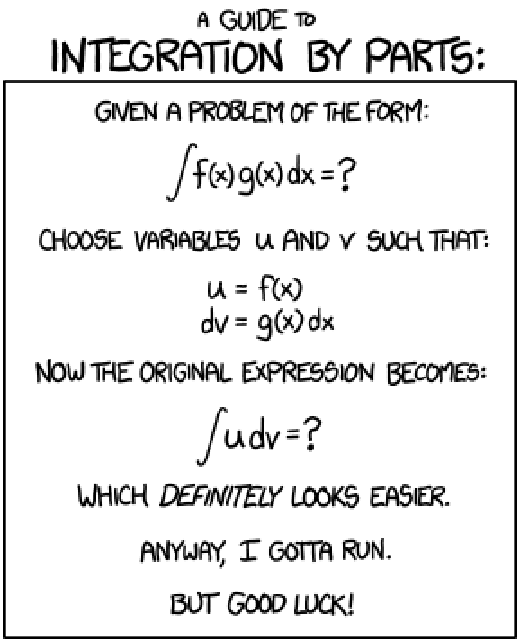
Intégration

Cours 3

Exercices 17

Pour bien démarrer

1. Qu'est-ce qu'un segment ?
2. Qu'est-ce qu'un intervalle ?
3. Qu'est-ce qu'une subdivision d'un segment ?
4. Qu'est-ce qu'une fonction en escalier ?
5. Comment interpréter une intégrale ?
6. Quelles sont les propriétés de l'intégrale ?
7. Que dire de l'intégrande lorsque l'intégrale est nulle ?



https://xkcd.com/1201

Remarque

On étudie dans ce chapitre la notion d'**intégrale généralisée**. On trouve dans certains ouvrages l'appellation **intégrale impropre**, équivalente.
On prendra garde au vocabulaire. S'il est vrai qu'une fonction est dérivable lorsque l'on peut calculer sa dérivée, il n'est pas vrai qu'une fonction est intégrable lorsque l'on peut calculer son intégrale.
On étudiera au chapitre 205 l'important **théorème de convergence dominée**, fournissant un moyen d'étude commode pour les limites de suites d'intégrales.

Lu dans le programme officiel

Aucune construction de l'intégrale n'est exigible.
Il n'est pas fait mention dans le programme officiel de règle du $x^\alpha f(x)$.

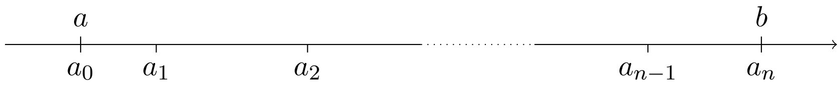
1 Fonctions continues par morceaux

Dans toute cette section, a et b sont deux réels tels que $a < b$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

1.1 Fonctions continues par morceaux

Définition. On appelle **subdivision** du segment $[a, b]$ toute famille finie de réels $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ tels que :

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$$



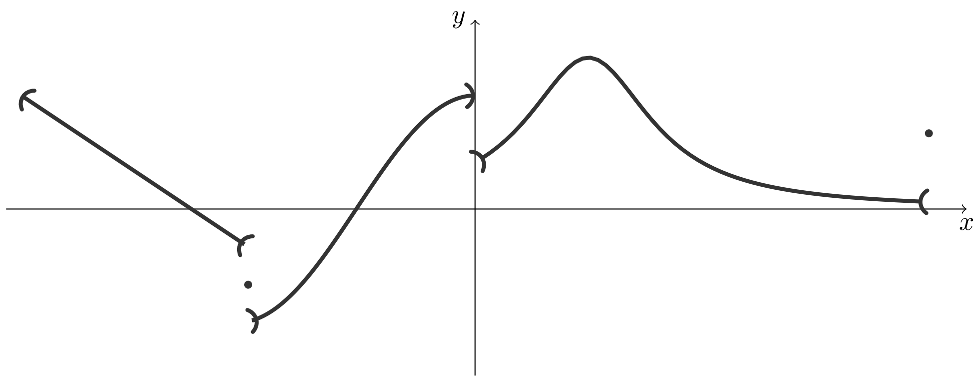
Définition. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est **continue par morceaux** sur le segment $[a, b]$ si et seulement s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que :

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\},\ f_{|]a_i, a_{i+1}[} \text{ se prolonge à } [a_i, a_{i+1}] \text{ en une fonction continue.}$$

On parle alors de subdivision **adaptée** à f, ou **subordonnée** à f.

Remarque.

- *Il n'y a pas une unique subdivision adaptée à une fonction continue par morceaux.*
- *On peut définir un ordre (partiel) sur l'ensemble des subdivisions : une subdivision peut être plus fine qu'une autre.*
- *Dire qu'une fonction est continue par morceaux, c'est dire qu'on peut la considérer sur un nombre fini de « petits » intervalles où elle est continue, avec des limites finies de chaque côté.*
- *Vue géométrique :*



Proposition. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.

En tout point où cela a un sens, f admet une limite finie à droite et à gauche.

Exemple. Les fonctions suivantes sont-elles continues par morceaux sur le segment $[0, 1]$?

$$f_1 : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases} \qquad f_3 : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \sin \frac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_2 : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases} \qquad f_4 : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition. Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est **continue par morceaux** sur I si et seulement si elle est continue par morceaux sur tout segment de I.

Exemple. Les fonctions suivantes sont-elles continues par morceaux sur l'intervalle $]0, 1]$?

$f_1 \,:\, x \mapsto \frac{1}{x}$

$f_2 \,:\, x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$

$f_3 \,:\, x \mapsto \sin \frac{1}{x}$

$f_4 \,:\, x \mapsto \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$

Remarque. *La définition se généralise au cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.*

Proposition. Les fonctions continues sont continues par morceaux.

Proposition. Les fonctions continues par morceaux sont localement bornées, *i.e.*

$$\forall x_0 \in I,\ \exists \eta > 0 \text{ t.q. } f_{|]x_0-\eta, x_0+\eta[} \text{ bornée}$$

1.2 Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux

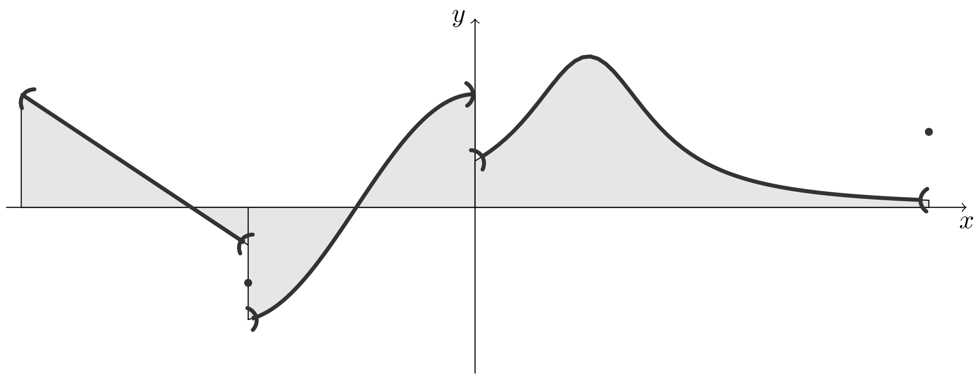
On généralise dans ce paragraphe la définition de l'intégrale vue en première année au cas des fonctions continues par morceaux.

Définition. Soit $f \,:\, [a,b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. Soit $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. Pour $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, on note f_i le prolongement par continuité à $[a_i, a_{i+1}]$ de $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$. On appelle **intégrale de f sur le segment** $[a,b]$, et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, le nombre :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque.

- *Chaque intégrale $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(t)\,\mathrm{d}t$ est une intégrale d'une fonction continue sur un segment, définie en première année.*
- *On peut justifier que ce nombre est indépendant du choix de la subdivision adaptée à f.*
- *Vue géométrique :*



Proposition. Les propriétés étudiées en première année pour les fonctions continues sur un segment restent valables pour les fonctions continues par morceaux :

- Linéarité
- Croissance, positivité (pour les fonctions à valeurs réelles)
- Inégalité triangulaire
- Relation de Chasles

Proposition. Si f est une fonction positive, continue, d'intégrale nulle sur $[a,b]$, alors f est nulle sur $[a,b]$.

Preuve. On comprend pourquoi la continuité par morceaux n'est ici pas suffisante. □

Définition. Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I. Soit $a \in I$. On appelle **intégrale fonction de la borne d'en haut de** f l'application :

$$F : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

Proposition. Avec les notations précédentes :

- F est continue sur I ;
- F est dérivable à gauche et à droite en tout point de I où cela a un sens ;
- Là où f est continue, F est dérivable et on a :

$$F'(x) = f(x)$$

2 Intégrales généralisées sur $[a,+\infty[$

Dans cette section, a désigne un réel fixé.

2.1 Intégrale convergente, intégrale divergente

Définition. Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. On dit que l'**intégrale généralisée** :

$$\int_a^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

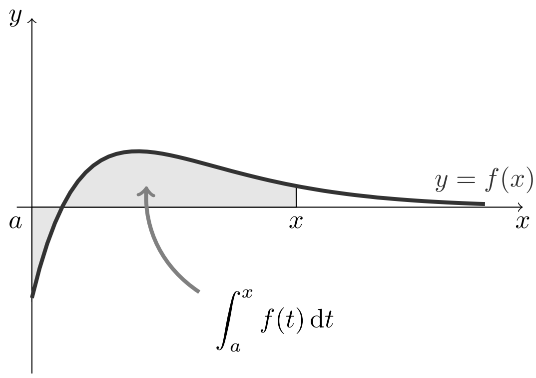
converge (ou existe) si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie ℓ lorsque $x \to +\infty$. Dans ce cas, on note :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \ell$$

On dit que l'intégrale généralisée **diverge** sinon.

Remarque. *L'intégrale* $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *pourrait être appelée « intégrale partielle » de l'intégrale généralisée.*

Interprétation géométrique :



Caractère local de la convergence. Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. La convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{\dots}^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas du choix dans $[a,+\infty[$ de la borne d'en bas.

Remarque. *Ainsi, on peut dès maintenant retenir que la convergence d'une intégrale généralisée en $+\infty$ dépend seulement du comportement de l'intégrande au voisinage de $+\infty$.*

Exemple. Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

$$\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^{\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\to+\infty} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\to+\infty} \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\to+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \int_{\mathrm{e}}^{\to+\infty} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\to+\infty} \cos t\,\mathrm{d}t$$

Remarque. *Les techniques d'étude de convergence seront étudiées un peu plus loin, et consisteront principalement à comparer l'intégrande à des fonctions de références. Pour les exemples qui précèdent, on travaille sur l'intégrale partielle, en revenant à la définition, ce qui ne sera pas le réflexe à avoir. Il s'agit en effet d'exemples (rares en pratique) où l'on peut exprimer une primitive de l'intégrande à l'aide des fonctions usuelles.*

Proposition. Lorsque f est à valeurs complexes, $\displaystyle\int_a^{\to+\infty} f$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^{\to+\infty} \mathrm{Re}(f)$ et $\displaystyle\int_a^{\to+\infty} \mathrm{Im}(f)$ convergent.

Exemple. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{\to+\infty} \cos(\omega t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

2.2 Cas des fonctions positives

Lemme. Dans le cas où l'intégrande est à valeurs positives, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.

3 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Remarque. *Sans autre précision, dans cette section, a et b sont tels que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et I désigne un intervalle dont les extrémités sont a et b.*
Lorsque a et b sont finis et $I = [a,b]$, il s'agit d'un segment.
Lorsque a est fini, $b = +\infty$ et $I = [a,+\infty[$, il s'agit du cas étudié au paragraphe précédent.

3.1 Intégrale convergente, intégrale divergente

Définition. Soit f une fonction continue par morceaux sur I.

- Lorsque $I = [a,b[$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x \underset{x<b}{\longrightarrow} b$. Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.

- Lorsque $I =]a, b]$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\to a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_{x}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x \underset{x>a}{\longrightarrow} a$. Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.
- Lorsque $I =]a, b[$, on dit que l'intégrale est **doublement généralisée**.
  Prenant c tel que $a < c < b$, on dit qu'elle converge si et seulement si $\displaystyle\int_{\to a}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{c}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ la somme de ces deux intégrales convergentes.

Remarque. *Par le caractère local, cette double convergence ne dépend pas du choix de c. Par la relation de Chasles, la valeur de l'intégrale ne dépend pas du choix de c.*

Proposition. Lorsque a (resp. b) est fini, et que f se prolonge par continuité en a (resp. b), alors l'intégrale généralisée en a (resp. b) converge et sa valeur coïncide avec l'intégrale de la fonction prolongée. On dit que l'intégrale est **faussement généralisée**.

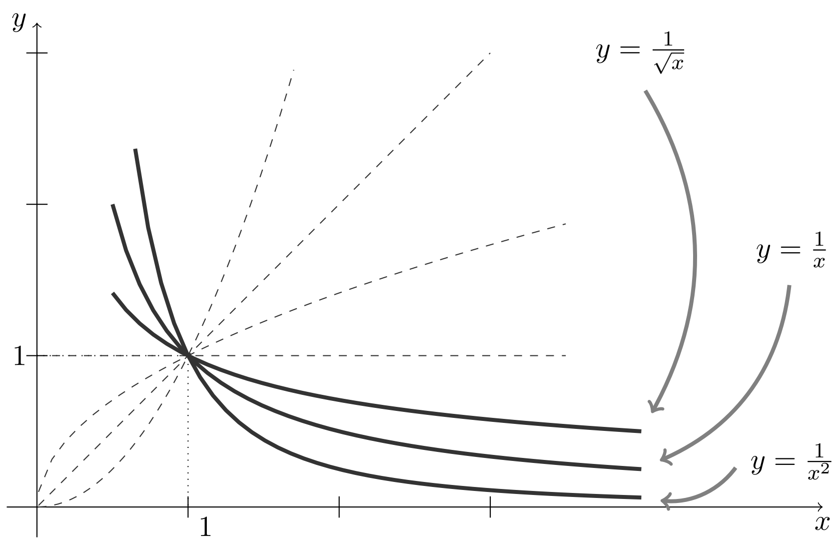
Remarque. *Ça n'aurait aucun sens de parler d'intégrale faussement généralisée en $\pm\infty$.*

Exemple. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

3.2 Exemples de référence

Intégrales de Riemann en $+\infty$.

> L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{1}^{\to+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

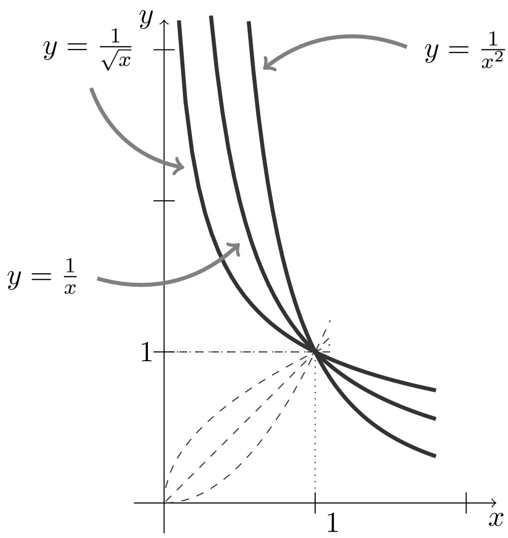


Exponentielle en $+\infty$.

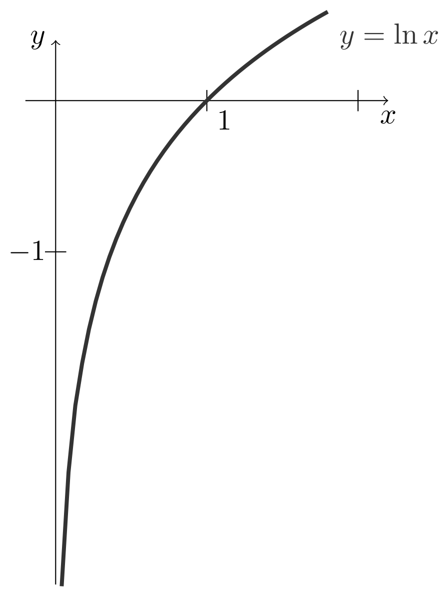
> L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{0}^{\to+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Intégrales de Riemann en 0.

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\to 0}^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.



Logarithme en 0. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\to 0}^{1} \ln t\,\mathrm{d}t$ converge. Sa valeur est négative.



3.3 Propriétés

Linéarité. Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur I, λ et μ deux scalaires. Si les intégrales généralisées $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors $\displaystyle\int_I \lambda f(t) + \mu g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_I \lambda f(t) + \mu g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_I g(t)\,\mathrm{d}t$$

Corollaire. Si $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\displaystyle\int_I f(t) + g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Remarque. *Que penser de l'écriture :*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+1)}\,\mathrm{d}t\ ?$$

Positivité. Soit f une fonction cpm sur I d'intégrale généralisée $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ convergente.

Si $\forall t \in I,\ f(t) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Croissance. Soit f et g deux fonctions cpm sur I, d'intégrales généralisées sur I convergentes.

Si $\forall t \in I,\ f(t) \leqslant g(t)$, alors $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_I g(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque. *Pour les intégrales généralisées convergentes, lorsque $a > b$, on définit par convention :*

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

Relation de Chasles. Soit f une fonction continue par morceaux sur I, d'intégrale généralisée sur I convergente.

Pour tous a, b, c éléments ou extrémités de I, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

avec convergence des intégrales impliquées.

Proposition. Soit $f\ :\ [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, telle que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente.

Pour $x < b$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\substack{x \to b \\ <}]{} 0$$

3.4 Techniques de calcul d'une intégrale généralisée

3.4.1 Calcul par primitivation de l'intégrande

Ce premier théorème est une conséquence directe de la définition.
Il s'applique lorsque l'on sait exprimer une primitive de l'intégrande.

Théorème.

> Soit f continue par morceaux sur $]a, b[$, dont on connaît une primitive F.
> L'intégrale $\displaystyle\int_{\to a}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si F admet une limite finie ℓ_a en a à droite et une limite finie ℓ_b en b à gauche.
> Dans ce cas, on a :
>
> $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_{t \overset{>}{\to} a}^{t \overset{<}{\to} b} = \ell_b - \ell_a$$

Remarque. *La convergence de l'intégrale est justifiée a posteriori par l'existence de limites finies du « crochet ».*

Exemple. Étudier la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 3t + 2}$.

3.4.2 Changement de variable

Le théorème du changement de variable est une technique efficace, et la formule doit pouvoir être utilisée « dans les deux sens ». L'entrainement permet d'avoir l'initiative de certains changements de variable classiques.

Le théorème est présenté pour le cas d'un intervalle ouvert, pour l'étude de $\displaystyle\int_{\to a}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$, mais se transpose aux cas d'un intervalle semi-ouvert, et bien-sûr au cas d'un segment.

Théorème.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$. Si $\varphi\ :\ ]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est :

- une bijection
- strictement croissante
- de classe $\mathcal{C}^1$

alors

- les deux intégrales $\displaystyle\int_{\to a}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\to\alpha}^{\to\beta} (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature ;
- elles sont égales en cas de convergence.

Remarque. *La convergence de l'intégrale est justifiée a posteriori par le changement de variable et la convergence de la nouvelle intégrale.*

Remarque. *Dans la pratique, on dit que l'on effectue le changement de variable $t=\varphi(u)$ et l'on écrit :*

$$\begin{array}{rcl} t & \textit{devient} & \varphi(u) \\ \mathrm{d}t & \textit{devient} & \varphi'(u)\,\mathrm{d}u \\ t \text{ de } a \text{ à } b & \textit{devient} & u \text{ de } \alpha \text{ à } \beta \end{array}$$

Remarque. *On peut adapter ce résultat au cas où φ est strictement décroissante.*

$$\begin{array}{rcl} t & \textit{devient} & \varphi(u) \\ \mathrm{d}t & \textit{devient} & \varphi'(u)\,\mathrm{d}u \\ t \text{ de } a \text{ à } b & \textit{devient} & u \text{ de } \beta \text{ à } \alpha \end{array}$$

Exemple. Convergence et calcul de $(\alpha>0)$:

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^{10}+1}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$
3. $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$
4. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$

Remarque. *Il convient de savoir justifier un changement de variable par une utilisation précise du théorème précédent. Néanmoins, lorsqu'il s'agit d'un problème de calcul, ou pour des changements de variable très simples, notamment affines, on peut gagner un peu de temps.*

3.4.3 Intégration par parties

Terminons par une formule elle aussi importante, qu'il faut appliquer avec précaution pour les intégrales généralisées. Elle est en particulier utile pour établir une relation de récurrence satisfaite par une intégrale dépendant de n.

Théorème.

Si :

- f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$
- $f(t)g(t)$ admet des limites finies en a à droite et en b à gauche

Alors :

- les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature
- en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)g(t)\Big]_{t \overset{>}{\to} a}^{t \overset{<}{\to} b} - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. *Il convient de savoir justifier une intégration par parties par une utilisation précise du théorème précédent. Néanmoins, lorsqu'il s'agit d'un problème de calcul, on peut gagner un peu de temps. Dans la pratique, on écrit :*

$$\int_a^b \overbrace{u(t)}^{\nearrow}\, \underbrace{v(t)}_{\searrow}\,\mathrm{d}t = [U(t)v(t)]_a^b - \int_a^b U(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

en s'assurant que le « crochet » a des limites finies. La flèche montante symbolise la primitivation, et la flèche descendante la dérivation. U désigne une primitive de u.
La convergence de l'intégrale est justifiée a posteriori par les limites finies du « crochet » et la convergence de la nouvelle intégrale.

Exemple. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

4 Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Remarque. *Sauf mention contraire, I désigne un intervalle, et f une fonction continue par morceaux sur I.*

4.1 Convergence absolue d'une intégrale généralisée

Définition. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente** si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Remarque. *L'intérêt de cette notion est de remplacer, lors de l'étude de la convergence d'une intégrale généralisée, l'intégrande par une fonction positive, ce qui donne accès aux théorèmes de convergence par comparaison, par équivalent, par comparaison asymptotique, et qui sont étudiés dans cette section.*

Théorème.

Soit f continue par morceaux sur I.
Si :

- $\displaystyle\int_I f$ converge absolument *i.e.* $\displaystyle\int_I |f|$ converge.

Alors :

- $\displaystyle\int_I f$ converge

- $\left|\displaystyle\int_I f\right| \leqslant \displaystyle\int_I |f|$.

Remarque.

- *Il s'agit bien d'une condition suffisante, mais non nécessaire.*
  La convergence, et la non convergence absolue de $\displaystyle\int_1^{\to+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ *fournit un contre-exemple classique qu'il convient d'avoir à l'esprit.*
- *Pour une fonction positive, convergence et convergence absolue de l'intégrale sont des notions équivalentes.*

4.2 Intégrabilité d'une fonction

Définition. On dit que f est **intégrable sur** I lorsque f est continue par morceaux sur I et l'intégrale de f sur I est absolument convergente.

Remarque. *Lorsque l'on dit intégrable sur* I, *on parle donc d'une fonction, de l'intégrande d'une intégrale absolument convergente.*
Lorsque l'on dit absolument convergente, on parle d'une intégrale généralisée, dont l'intégrande est intégrable.
Pas de confusion : intégrable ne signifie pas que l'on peut simplement considérer l'intégrale de la fonction.
Pas de confusion : intégrable ne signifie pas primitivable.

Notation. On note $L^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur I.

Proposition.

- Sur un segment $[a, b]$, une fonction continue est intégrable.
- Sur un intervalle $]a, b[$ borné, une fonction continue qui se prolonge par continuité en a et b est intégrable.

Remarque. *Si* $I = [a, b[$, *on dit de façon un peu abusive que l'on étudie l'intégrabilité de* f *en* b. *L'intégrabilité de* f *continue (par morceaux) sur* $I = [a, b[$ *ne dépend en effet que du comportement local de* f *au voisinage de* b.

Exemples de référence.

- ln est intégrable sur $]0, 1]$;
- $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$;
- $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$;
- $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$.

4.3 Techniques d'étude

Remarque. *Dans la pratique, pour justifier qu'une intégrale généralisée converge, on étudie sa convergence absolue en utilisant l'un des théorèmes de ce paragraphe. On identifie la (ou les) bornes de l'intervalle où l'intégrale est généralisée en précisant la continuité (par morceaux) de l'intégrande, et on se place sur un voisinage de cette borne (on fait deux études distinctes si l'intégrale est doublement généralisée). L'idée est de comparer l'intégrande à une fonction de référence, la comparaison devant être « raisonnable » sur ce*

voisinage.
L'étude se fait donc sur l'intégrande, et non l'intégrale elle-même. C'est pour cette raison que les résultats sont énoncés en termes de fonctions intégrables.

Commençons par énoncer le théorème dans le cas où $I = [a, +\infty[$. On considère f, g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$.

Théorème.

> Si $|f| \leqslant |g|$ et g intégrable sur $[a, +\infty[$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

Théorème.

> Si $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{O}(g(x))$ et g intégrable sur $[a, +\infty[$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

Remarque. *Ce résultat s'utilise en particulier lorsque* $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}(g(x))$.

Théorème.

> Si $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x)$ et g intégrable sur $[a, +\infty[$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

Proposition. Précisons aussi que, dans le cas où f et g sont telles que $0 \leqslant |f| \leqslant |g|$ et f non intégrable sur $[a, +\infty[$, alors g n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

Exemple. Étudier l'intégrabilité sur un voisinage de $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$t \mapsto \frac{\cos t}{1+t^2} \qquad t \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{t}} \qquad t \mapsto \frac{1}{t^2 \ln t}$$

$$t \mapsto \frac{2t}{1+t^3} \qquad t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{1+t}$$

Énonçons maintenant le théorème dans le cas où $I =]0, b]$. On considère f, g deux fonctions continues par morceaux sur $]0, b]$.

Théorème.

> Si $|f| \leqslant |g|$ et g intégrable sur $]0, b]$, alors f est intégrable sur $]0, b]$.

Théorème.

> Si $f(x) \underset{x \to 0}{=} \mathrm{O}(g(x))$ et g intégrable sur $]0, b]$, alors f est intégrable sur $]0, b]$.

Théorème.

> Si $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} g(x)$ et g intégrable sur $]0, b]$, alors f est intégrable sur $]0, b]$.

Exemple. Étudier l'intégrabilité sur un voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$$t \mapsto \frac{\ln t}{1+t} \qquad t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} t}{t\sqrt{t}} \qquad t \mapsto \frac{1}{\sin t}$$

Remarque. *Les théorèmes précédents s'adaptent à tous les cas d'intervalles semi-ouverts. On préfèrera cependant commencer par effectuer un changement de variable pour ramener le problème en* 0 *ou en* $+\infty$*, là où on sait comparer les fonctions entre elles.*

Exemple. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}} \,\mathrm{d}t$.

Méthode. On peut aussi procéder, pour des exemples un peu plus délicats, par **éclatement** : pour étudier la convergence d'une intégrale généralisée, on effectue un développement limité de son intégrande et on l'écrit comme somme de plusieurs termes, pour lesquels on étudie séparément la convergence de l'intégrale.

Exemple. Comment étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}\,\mathrm{d}x$?

4.4 Cas des fonctions continues et intégrables

Théorème.

Si f est continue et intégrable, et $\displaystyle\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est la fonction nulle sur I.

Remarque.

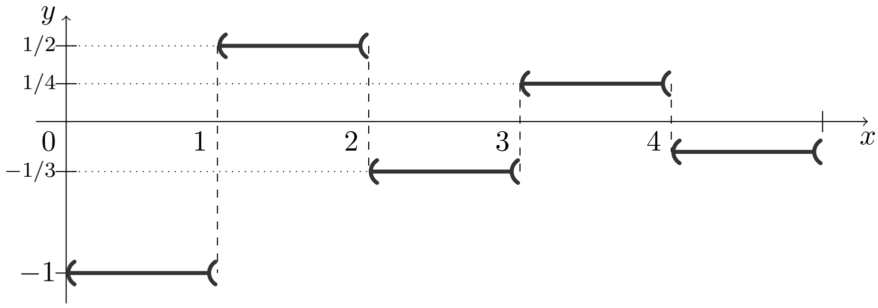
- *L'hypothèse de continuité est importante ici.*
- *Ce théorème est souvent utilisé pour montrer le caractère « défini-positif » d'un produit scalaire défini par une intégrale.*
- *On fera référence à ce théorème en parlant de « fonction continue, positive, d'intégrale nulle ».*

5 Exercices et résultats classiques à connaître

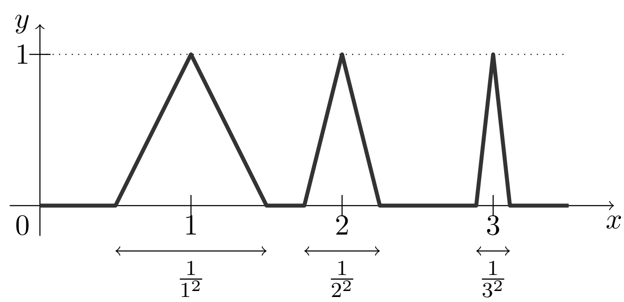
5.1 Une analogie trop séduisante avec les séries

Réfléchissons à la différence entre convergence et convergence absolue d'une intégrale généralisée, ainsi qu'à ces analogies avec les séries numériques, qui sont certes séduisantes, et auxquelles on pense tous. Voici deux exemples de fonctions définies par leur graphe :

1. Cette fonction est-elle intégrable ? Son intégrale sur $[0, +\infty[$ est-elle convergente ?



2. Cette fonction est-elle intégrable ? A-t-elle une limite en $+\infty$?



5.2 Trouver une relation de récurrence par intégration par parties

202.1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$.
Trouver une relation entre I_n et I_{n+1} et en déduire I_n.

5.3 Quatre exemples d'intégrales de Bertrand

202.2

Étudier la convergence de :

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,\ln t}\,\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$

Remarque. *On appelle **intégrale de Bertrand** une intégrale de la forme* $\displaystyle\int_{\dots}^{\dots} \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t}\,\mathrm{d}t$*, généralisée en* 0 *ou en* $+\infty$*. Son étude systématique n'est pas au programme.*

5.4 Trouver un équivalent par intégration par parties

202.3

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

(a) Montrer l'existence de I_n, pour tout n.

(b) Déterminer la limite de $(I_n)_n$.

(c) À l'aide d'une intégration par parties, trouver un équivalent simple de I_n.

5.5 Étude de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ sur $]0,+\infty[$

202.4

(a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale convergente.

(b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale divergente.

(c) En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$? La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

5.6 Étude de convergence d'intégrale par une méthode d'éclatement

202.5

Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x$.

5.7 Utiliser les complexes pour calculer une intégrale généralisée

202.6

Utiliser les complexes pour calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin t \,\mathrm{d}t$

Exercices de mathématiques

Convergence d'intégrales généralisées, intégrabilité

202.7

Étudier l'existence des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\mathrm{d}t$

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\mathrm{d}t$

(f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$

202.8

Déterminer une CNS sur les paramètres réels a et b pour que les intégrales suivantes existent :

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a(t-1)^b}$ (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^a\mathrm{e}^{-t}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$

202.9

Examiner la nature de

$$\int_0^{+\infty} \ln(x^2+x+1) + a\ln(x^2+2x+4) + b\ln(x^2+3x+10)\,\mathrm{d}x$$

202.10

On note $f(x)=\cos(x^2)$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Montrer que f n'a pas de limite en $+\infty$.

202.11

Étudier la nature de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \cos(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$$

202.12

Étudier la convergence de l'intégrale généralisée

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x}\,\mathrm{d}x$$

202.13

α étant un paramètre réel, étudier la nature de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Calcul d'intégrales généralisées

202.14

Existence et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

202.15

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{t^2+1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$.

202.16

Soit f définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2}$. Montrer que f est intégrable sur $]0,1[$ et déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

202.17

Montrer que les intégrales suivantes sont bien définies et les calculer : ($a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$)

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\int_0^1 \ln^n t\,\mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\operatorname{Arctan} t}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$ ($t = \frac{1}{u}$)

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\theta}{\sqrt{\cos\theta}}\,\mathrm{d}\theta$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin at\,\mathrm{d}t$

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x$

202.18

(a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

(b) Déterminer sa valeur en utilisant le changement de variable $t = \tan u$.

(c) Retrouver sa valeur en utilisant l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$

202.19

Soit $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

(a) Montrer que I est bien définie, et que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$.

(b) En déduire une expression de I en fonction de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x$, puis la valeur de I.

(c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x}\,\mathrm{d}x$.

202.20

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, et utiliser le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ pour montrer qu'elle est nulle.

202.21

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et F sa primitive qui s'annule en 0. Montrer que la convergence de l'une des deux intégrales ci-dessous implique celle de l'autre, et comparer leurs valeurs :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Suite d'intégrales généralisées

202.22

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$. Déterminer une relation entre I_n et I_{n+1}, pour tout $n \geqslant 1$. En déduire la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

202.23

On pose, pour $n \geqslant 2$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$$

(a) Déterminer une suite de fonctions $(f_n)_n$ telle que :

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

(b) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

202.24

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

(a) Montrer que I_n est une intégrale convergente.

(b) Montrer que $I_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

202.25

Étudier la convergence, et calculer la valeur, pour tout $n \geqslant 1$, de :

$$I_n = \int_0^{+\infty} t \sin t\, \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

Autres exercices

202.26

Établir que la fonction $f\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

202.27

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \sin^n x$. Pour $\alpha > 0$, on note alors :

$$I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

(a) Étudier la convergence de $I_n(\alpha)$.

(b) En calculant de deux manières différentes $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} f_n''(x)\,\mathrm{d}x$, déterminer une relation de récurrence liant $I_n(\alpha)$ et $I_{n-2}(\alpha)$, pour tout $n \geqslant 2$.

(c) Exprimer $I_n(\alpha)$ en fonction de n et α.

202.28

(a) Justifier l'existence de : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

(b) Établir : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

(c) En séparant cette dernière intégrale en deux, observer que $I = \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$ puis donner la valeur de I.

Petits problèmes d'entrainement

✍ **202.29**

Soit $0 < a < b$ deux réels.

(a) Montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$.

(b) Démontrer que, pour tout réel $h > 0$:

$$\int_h^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{ah}^{bh} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

(c) Montrer que la fonction $g \,:\, t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t} - 1}{t}$ possède un prolongement continu en 0. En déduire la valeur de I.

✍ **202.30**

On s'intéresse à :

$$I = \int_1^{+\infty} \operatorname{Arcsin}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

(a) Montrer la convergence de cette intégrale généralisée.

(b) Calculer I.
On pourra effectuer une intégration par parties et remarquer que $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ est la dérivée de $\ln(x + \sqrt{x^2-1})$ sur $]1, +\infty[$.

202.31

(a) a désigne un réel tel que $a > -1$. En posant $x = \tan t$, montrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + a\sin^2 t} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$$

(b) Donner, en fonction de $\alpha > 0$, la nature de la série :

$$\sum \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2 t}$$

(c) Même question pour :

$$\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^\alpha \sin^2 t}$$

(d) Donner la nature de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^\alpha \sin^2 t}$$

202.32

(a) Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
Pour $x > 0$, on pose :

$$I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

(b) On rappelle que $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$. Établir que :

$$I(x) = \frac{3}{4}\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

(c) En déduire la valeur de I.

202.33

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}}{x}\,\mathrm{d}x$.

On utilisera une série.

202.34

Déterminer un équivalent pour $x \xrightarrow{>} 0$ de $x \mapsto \displaystyle\int_{x^3}^{x^2} \frac{\mathrm{e}^t}{\operatorname{Arcsin} t}\,\mathrm{d}t$