Suites et séries numériques

Cours 3

Exercices 10

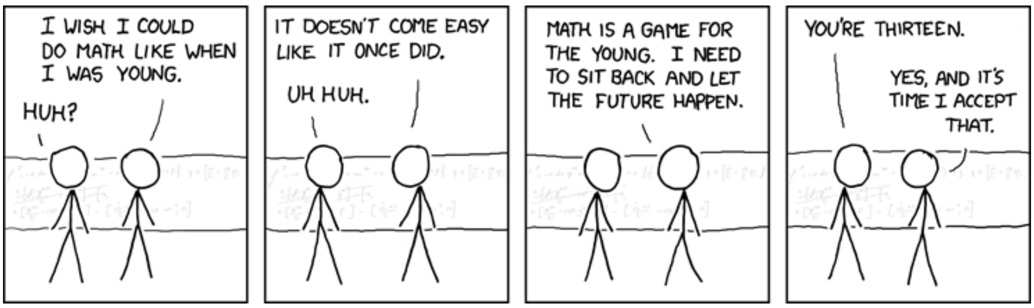
Pour bien démarrer

Suites numeriques

1. Quelle est l'écriture quantifiée de $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$?
2. Quels sont les théorèmes fondamentaux concernant l'existence de limite ?
3. Qu'est-ce qu'une suite définie par récurrence ?
4. Y a-t-il un résultat concernant ces suites dans le cours ?
5. Comment démontrer des propriétés satisfaites par une suite définie par récurrence ?

Séries numériques

6. Qu'est-ce qu'une série numérique ?
7. Que signifie « étudier une suite, une série » ?
8. Comment note-t-on une série numérique ? Comment lit-on cette (ces) notation(s) ?
9. Que signifie « grossièrement divergente » ?
10. Qu'est-ce que le reste d'une série convergente ?
11. Cas de la série géométrique.
12. Quel lien y a-t-il entre suite et série ?
13. Exemple des séries de Riemann ?
14. Techniques d'étude des séries à termes positifs ?
15. Techniques d'étude des séries à termes de signes quelconques, ou complexes ?
16. Il y a quoi dans le chapitre « analyse asymptotique » de première année ?
17. Est-ce que l'on peut faire le produit de 2 polynômes ? Comment ?



https://xkcd.com/447

Lu dans le programme officiel

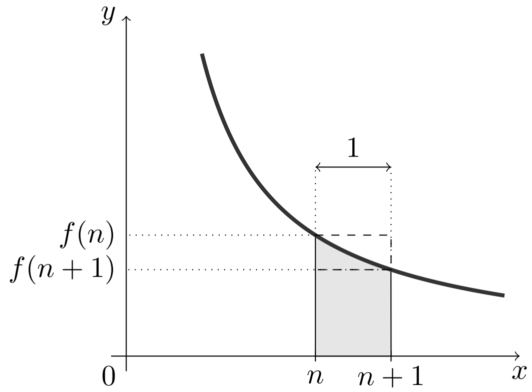
Formule de Stirling : équivalent de $n!$ (démonstration non exigible). La transformation d'Abel est hors programme. Convergence du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes (démonstration non exigible). Il n'est pas fait mention dans le programme de règle du $n^\alpha u_n$.

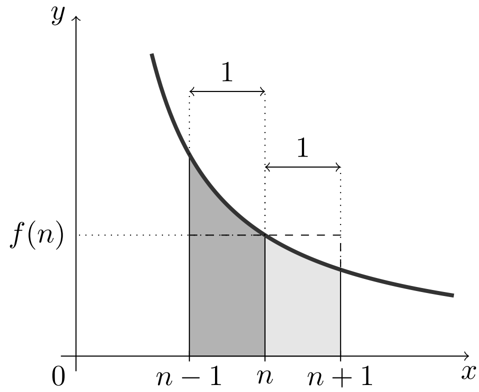
1 Séries numériques

1.1 Technique de comparaison série-intégrale

Technique de comparaison. Soit f une fonction continue par morceaux, positive et décroissante.

- Encadrements élémentaires : par décroissance de f, on a :





$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \qquad \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

- En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\sum_{n=n_0+1}^{N} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0}^{N-1} f(n) \quad \text{et} \quad \int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} f(n) \leqslant \int_{n_0-1}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t$$

- Si la série $\sum f(n)$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
- Si l'intégrale $\displaystyle\int^{\to+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors la série $\sum f(n)$ converge.
- En cas de convergence, on a un encadrement des restes de $\sum f(n)$:

$$\int_{N+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} f(n) \leqslant \int_{N}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

  qui permet souvent d'obtenir un équivalent.
- En cas de divergence, l'encadrement déjà vu des sommes partielles de $\sum f(n)$ permet souvent d'obtenir un équivalent.
- Ces inégalités s'adaptent au cas où f est croissante.
- On présentera toujours un schéma pour illustrer les inégalités annoncées.

Exemple. Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_n$.

1.2 Formule de Stirling

Formule.

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, \mathrm{e}^{-n}$$

Preuve. Non exigible, proposée en complément au § 4.3. □

1.3 Règle de d'Alembert

Remarque. *Cette règle est mentionnée dans le programme. Nous la traitons donc en cours. Mais c'est un résultat peu utile pour l'étude des séries numériques, et il ne doit pas cacher le principe du résultat : on compare le terme général de la série à étudier à une série de référence – ici, une série géométrique.*

Règle de d'Alembert. Soit $\sum u_n$ une série numérique dont le terme général ne s'annule pas. On suppose que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

1. Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.
2. Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
3. Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Preuve.

□

Exemple. Peut-on appliquer la règle de d'Alembert aux séries suivantes ?

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n!} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^2}{2^n}$$

1.4 Séries alternées

Définition. Une série réelle est dite **alternée** lorsqu'elle est de la forme :

$$\sum (-1)^n u_n$$

où u_n est positif.
Ainsi, une série alternée est une série dont le terme général change de signe à chaque changement d'indice.
La série $\sum(-1)^{n+1}u_n$, avec $u_n \geqslant 0$ est aussi qualifiée d'alternée.

Théorème spécial des séries alternées.

Si $(u_n)_n$ est positive, décroissante et de limite nulle,
alors la série alternée $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Preuve. □

Remarque. *Le résultat s'adapte lorsque la série est $\sum(-1)^{n+1}u_n$.*
Remarque. *Ce théorème s'appelle parfois, dans certains ouvrages, le critère de Leibniz.*
Résultat complémentaire.

> Si la série alternée $\sum(-1)^n u_n$ vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées, alors pour tout n, le reste R_n a le signe de $(-1)^{n+1}u_{n+1}$ et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.
> D'autre part, la somme S est encadrée par deux sommes partielles successives.

Remarque. *Cela signifie que, lorsque le TSSA s'applique, le reste est majoré par son premier terme, en valeur absolue, et il est du signe de ce premier terme. Cela permet d'estimer a priori l'erreur commise lorsque l'on approxime S par S_n.*

Remarque. *En utilisant ce résultat avec R_0, on a le signe et une majoration de la somme.*

Exemple. Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Résultat. La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

On appelle ces séries les **séries de Riemann-alternées**.

Remarque. *Attention ! On ne peut pas montrer la convergence d'une série équivalente à une série à laquelle on applique le TSSA, car son terme général n'est pas de signe constant. Ces exemples relèvent plutôt de la méthode d'éclatement, étudiée au § 1.5*

Exemple. Peut-on appliquer le TSSA à la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}$?

Et à celle de terme général $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$?

1.5 Méthode d'éclatement

Lorsque l'on ne peut pas montrer la convergence absolue ni appliquer le TSSA, on peut effectuer une développement asymptotique du terme général u_n, et essayer de l'écrire comme somme de termes simples. S'il est somme de termes de séries convergentes, ou s'il est somme de termes de séries toutes convergentes sauf une, on peut conclure.

Exemple. Étudier la série de terme général :

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \qquad\qquad \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}$$

2 Produit de Cauchy de deux séries

Définition. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. On appelle **produit de Cauchy** de ces deux séries la série $\sum w_n$ où :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

Remarque. *On peut aussi noter $w_n = \sum\limits_{p+q=n} u_p v_q$.*

Théorème.

> On conserve les notations de la définition.
> Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors $\sum w_n$ converge absolument et on a :
>
> $$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Preuve. Non exigible. Proposée en complément au § 4.2. □

Exemple. Étudier la série de terme général $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$.

Exemple. Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Montrer que : $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$.

Remarque. *On verra que le produit de Cauchy s'utilise naturellement dans le contexte des séries entières.*

3 Exercices et résultats classiques à connaître

3.1 Étudier une suite récurrente

203.1

Étudier la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sin u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

203.2

Étudier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\cos u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

3.2 Le théorème de Cesàro

203.3

On considère une suite réelle $(u_n)_n$, et on note $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ la moyenne arithmétique de ses premiers termes.

(a) On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Démontrer que la suite $(v_n)_n$ converge vers 0.

(b) On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

(c) Que penser de la réciproque ?

3.3 Constante d'Euler, développement asymptotique de la série harmonique

203.4

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

En utilisant le lien suite-série, montrer que $(u_n)_n$ converge.

On note traditionnellement γ sa limite, appelée ***constante d'Euler****, et on a donc établi :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

3.4 Une transformation d'Abel

203.5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \sin k$.

(a) Montrer que $(\sigma_n)_{n \geqslant 1}$ est bornée.

(b) En déduire que la série $\sum_{k \geqslant 1} \frac{\sin k}{k}$ converge.

3.5 Utiliser une comparaison série-intégrale

203.6

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

4 Compléments de cours

4.1 Les séries de référence

Séries de Riemann.

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Séries géométriques.

$\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$.

Remarque. *Les séries « exponentielles » sont des séries géométriques. Et donc :*

$\sum \mathrm{e}^{-\alpha n}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 0$.

Séries de Riemann alternées.

$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Remarque. *Attention ! Comme cette dernière série n'est pas de signe constant, on ne peut pas l'utiliser dans un raisonnement où l'on effectue une comparaison à une série convergente.*

La série exponentielle.

$\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

4.2 Complément : preuve du théorème sur le produit de Cauchy

Preuve du théorème (non exigible).

- On commence par traiter le cas où les suites sont à valeurs positives. Dans ce cas, convergence et convergence absolue désignent la même notion. La démonstration se fait en revenant à la définition de la convergence, c'est-à-dire par l'étude de la suite des sommes partielles. On note :

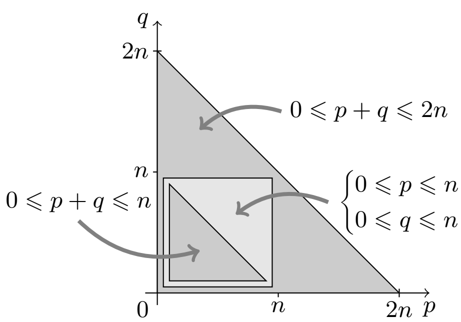
$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,\ U = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k,$$
$$V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k,\ V = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k \text{ et}$$
$$W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$$

et on chercher à montrer que $W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} UV$.

Comme $w_k \geqslant 0$ pour tout k, la suite $(W_n)_n$ est croissante, de même que les suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$. On a :

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{p+q=k} u_p v_q = \sum_{0\leqslant p+q\leqslant n} u_p v_q$$
$$U_n \times V_n = \left(\sum_{p=0}^{n} u_p\right) \times \left(\sum_{q=0}^{n} v_q\right) = \sum_{0\leqslant p,q\leqslant n} u_p v_q$$
$$W_{2n} = \sum_{0\leqslant p+q\leqslant 2n} u_p v_q$$

Tous les termes considérés sont positifs. Les domaines de sommations satisfont les inclusions suivantes :



donc :
$$W_n \leqslant U_n \times V_n \leqslant W_{2n}$$
Par croissance de $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$, on a pour tout n :
$$W_n \leqslant U \times V$$
donc la suite $(W_n)_n$ est croissante et majorée, donc converge vers une limite que l'on note W. Par passage à la limite dans l'encadrement précédent, en utilisant que $(W_{2n})_n$ est extraite de $(W_n)_n$ donc converge vers la même limite, on a $W \leqslant U \times V \leqslant W$.
On a donc montré que la suite des sommes partielle $(W_n)_n$ est convergente, donc $\sum w_n$ converge, et sa somme W vaut $U \times V$.

- On se place maintenant dans le cas général de séries numériques à termes généraux quelconques, en conservant les mêmes notations.
D'une part la série $\sum w_n$ converge absolument par majoration :
Pour tout n :
$$|w_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k|\,|v_{n-k}|$$
qui est le terme général d'une série convergente (produit de Cauchy de $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$) par application du premier point.
D'autre part :
$$\begin{aligned}|U_nV_n - W_n| &= \left|\sum_{\substack{0\leqslant p,q\leqslant n\\ n<p+q}} u_p v_q\right| \ \forall n\\ &\leqslant \sum_{\substack{0\leqslant p,q\leqslant n\\ n<p+q}} |u_p||v_q|\\ &= U'_n V'_n - W'_n\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ par le premier point}\end{aligned}$$
où $U'_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|$, $V'_n = \sum_{k=0}^{n} |v_k|$ et $W'_n = \sum_{k=0}^{n} |w_k|$.
Donc la somme de la série $\sum w_n$ est bien le produit $U \times V$.

□

4.3 Complément : preuve de la formule de Stirling

Preuve de la formule de Stirling.

- Étudions la série de terme général défini par :

  $$u_1 = 1 \text{ et } u_n = 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{ pour } n \geqslant 2$$

  On a, au voisinage de $+\infty$:

  $$\begin{aligned} u_n &= 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &\underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2} \end{aligned}$$

  qui est le terme général d'une série convergente et de signe constant. Donc $\sum u_n$ converge, on note S sa somme :

  $$S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

- Exprimons la somme partielle de cette série :

  $$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(1 + (k - \frac{1}{2})(\ln(k-1) - \ln(k))\right) \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \Big(1 + (k - \frac{1}{2}) \ln(k-1) \\ &\qquad -(k + \frac{1}{2}) \ln k + \ln k\Big) \\ &= n - (n + \frac{1}{2}) \ln n + \sum_{k=2}^{n} \ln k \\ &\qquad \text{par télescopage} \\ &= n - (n + \frac{1}{2}) \ln n + \ln(n!) \end{aligned}$$

- On a donc, en passant à l'exponentielle :

  $$e^S \underset{n\to+\infty}{\longleftarrow} e^{S_n} = \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

  et donc :

  $$n! \underset{+\infty}{\sim} e^S \, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

- Lors de l'étude des intégrales de Wallis, on a établi :

  $$\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!\sqrt{p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \sqrt{\pi}$$

  Mais en utilisant l'équivalent obtenu précédemment, on a aussi :

  $$\begin{aligned} \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!\sqrt{p}} &\underset{+\infty}{\sim} \frac{2^{2p} e^{2S} p^{2p+1} e^{-2p}}{e^S (2p)^{2p+\frac{1}{2}} e^{-2p} \sqrt{p}} \\ &= \frac{e^S}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

  Et donc, par unicité de la limite, $e^S = \sqrt{2\pi}$.

- En conclusion :

  $$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

□

Exercices de mathématiques

Suites définies par récurrence

203.7

(a) Étudier la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Préciser sa limite éventuelle.

(b) Donner un équivalent de u_n. On pourra pour cela chercher α et $C \neq 0$ tels que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} C$ et appliquer le théorème de Cesàro.

203.8

Étudier la suite définie par : $u_0 = a \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \dfrac{\operatorname{Arctan} u_n}{4 + \cos u_n}$

203.9

Étudier la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \ln(u_n + 3)$ dans le cas où $u_0 = 0$, puis dans le cas où $u_0 = 5$. Illustrer graphiquement.

203.10

On s'intéresse à la suite définie par :

$$z_0 \in \mathbb{C} \text{ et } z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)\ \forall n \in \mathbb{N}$$

(a) Que dire de la suite lorsque $z_0 \in \mathbb{R}$?

On suppose désormais que $z_0 \notin \mathbb{R}$.

(b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\rho_n > 0$ et $\theta_n \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$ tels que :

$$z_n = \rho_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}$$

(c) Montrer que $(z_n)_n$ converge.

Études de suites numériques

203.11

(a) Déterminer un développement asymptotique de $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ à la précision $o(1/n^2)$.

(b) Même question avec $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

(c) Même question avec $w_n = \sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n - (-1)^n}\right)$.

203.12

(a) Déterminer la limite ℓ de la suite de terme général :

$$u_n = \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^n$$

(b) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n - \ell$.

203.13

(a) On considère deux suites numériques (u_n) et (v_n) telles que $u_n \sim v_n$. Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

(b) Déterminer le signe au voisinage de $+\infty$ de $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

203.14

Soit $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$p_n = \cos(\theta) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \dots \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

(a) Que dire de la suite $(p_n)_n$ lorsque $\theta = 0$?

Dans les questions suivantes, on suppose que $\theta \neq 0$.

(b) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin \dfrac{\theta}{2^n} \neq 0$.

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \dfrac{\cos\theta \sin\theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}}$.

(d) Déterminer la limite de $(p_n)_n$.

Comparaison série-intégrale

203.15

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{(\ln 2)^2 + \cdots + (\ln n)^2}$$

203.16

(a) Soit $\alpha > 1$ un paramètre réel. On note $R_N = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Justifier l'existence de R_N, l'encadrer et en déduire un équivalent pour $N \to +\infty$.

(b) Soit $\alpha \leqslant 1$ un paramètre réel. On note $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$. Justifier l'existence de S_N, l'encadrer et en déduire un équivalent pour $N \to +\infty$.

Étude de la convergence des séries numériques

203.17

Étudier la convergence des séries dont le terme général est :

(a) $u_n = \dfrac{\cos(\alpha n)}{n^2+1}$.

(b) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}+2}$.

(c) $u_n = (-1)^n \dfrac{n^2-3}{(2n+1)!}$.

(d) $u_n = (-1)^n \sqrt{n} \sin \dfrac{1}{n}$.

(e) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4} + \cos n}$.

203.18

Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \mathrm{e}^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$$

203.19

Étudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \ln(2n + (-1)^n) - \ln(2n)$$

203.20

Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \operatorname{Arcsin} \frac{1}{n^2}$.

203.21

Convergence de la série de terme général (où $\alpha > 0$) :

$$u_n = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \frac{\pi}{4}$$

203.22

Étudier la série numérique $\sum u_n$ lorsque :

(a) $u_n = \dfrac{1}{n^2 \ln n}$

(b) $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$

(c) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n} \ln n}$

(d) $u_n = \dfrac{1}{n \ln n}$

(e) $u_n = \dfrac{1}{n \ln^2 n}$

(f) $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

(g) $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$

203.23

Déterminer la nature des séries de terme général :

(a) $a_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$

(b) $b_n = (-1)^n \mathrm{Arcsin} \dfrac{1}{n}$

(c) $c_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4} + (-1)^{n+1}}$

(d) $d_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

(e) $e_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$

(f) $f_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$

Calcul de sommes de séries numériques

203.24

Déterminer la nature, et en cas de convergence, calculer la somme de :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$

203.25

Montrer la convergence et calculer la somme de :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-2n} \operatorname{ch} n$

(b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{2n-1}{n^3-4n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$

(e) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

(f) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (n+1)3^{-n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(\mathrm{i}-1)\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}-1}$ où $\mathrm{i}^2=-1$.

Produit de Cauchy

203.26

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$v_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} 2^k u_k$$

(a) On suppose dans cette question que la série $\sum u_n$ converge absolument. En observant un produit de Cauchy, montrer que la série $\sum v_n$ converge et exprimer sa somme en fonction de celle de $\sum u_n$.

(b) On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_n$ converge vers 0. Déterminer la limite de $(v_n)_n$.

203.27

Pour $n \geqslant 1$, on pose :

$$u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

(a) Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.

(b) Montrer que leur série produit de Cauchy diverge.

Petits problèmes d'entrainement

✍ **203.28**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

(a) Montrer que $(u_n)_n$ est bornée.

(b) Est-elle convergente ?

✍ **203.29**

On définit, sous réserve d'existence :

$$f_n(x) = \frac{\ln(n)}{1+(-1)^n n}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{n}x} \text{ et } S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$$

(a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$ converge.

(b) Montrer que :

$$\frac{\ln(n)}{1+(-1)^n n} - (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n^2}$$

(c) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln(n)}{1+(-1)^n n} - (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.

(d) Déterminer le domaine de définition de S.

203.30

(a) Montrer que l'équation $x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$ a une unique racine positive, notée x_n.

(b) Déterminer la limite de $(x_n)_n$, puis étudier les séries $\sum x_n$ et $\sum(-1)^n x_n$.

203.31

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on note :

$$f_n(x) = x^{n+1} + x^n + 2x - 1$$

(a) Montrer que l'équation :

$$x^{n+1} + x^n + 2x - 1 = 0$$

possède sur $\mathbb{R}_+$ une unique solution, que l'on notera x_n.

(b) Utiliser $f_n\left(\frac{1}{2}\right)$ pour comparer x_n et $\frac{1}{2}$.

(c) Montrer que $(x_n)_n$ est monotone.

(d) Déterminer la limite de $(x_n)_n$.

203.32

(a) Déterminer, pour $\alpha \geqslant 1$, la limite pour $n \to +\infty$ de :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha}$$

(b) Déterminer la limite pour $n \to +\infty$ de :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \sin\frac{1}{k}$$

203.33

Soit $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+2})$.

(a) Donner un équivalent simple de u_n, pour $n \to +\infty$.

(b) Étudier la convergence absolue et la convergence de $\sum u_n$.

203.34

On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{4n+1}$

(a) Montrer que cette série converge. On note S sa somme.

(b) Montrer que $S = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$.

(c) On donne :

$$\frac{1}{1+t^4} = \frac{1}{4}\frac{2+t\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1} + \frac{1}{4}\frac{2-t\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1}$$

Calculer alors S.

203.35

On considère la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$.

(a) Déterminer les variations de $(I_n)_n$.

(b) Montrer que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On pourra pour cela découper l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en $[0, \alpha]$ et $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$.

(c) Montrer que la série $\sum(-1)^n I_n$ converge, et calculer sa somme.

203.36

(a) Trouver un équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

(b) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$u_n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C + \mathrm{o}(1)$$

(c) On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln 2}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k}$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k}$.

203.37

On considère la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, appelée *série harmonique alternée*.

(a) Montrer que cette série n'est pas absolument convergente.

(b) Montrer que cette série est convergente.

(c) En remarquant que $\dfrac{1}{n+1} = \displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t$, calculer la somme de cette série.

(d) En déduire un encadrement de $\ln 2$, à 10^{-1} près, à l'aide de deux rationnels.