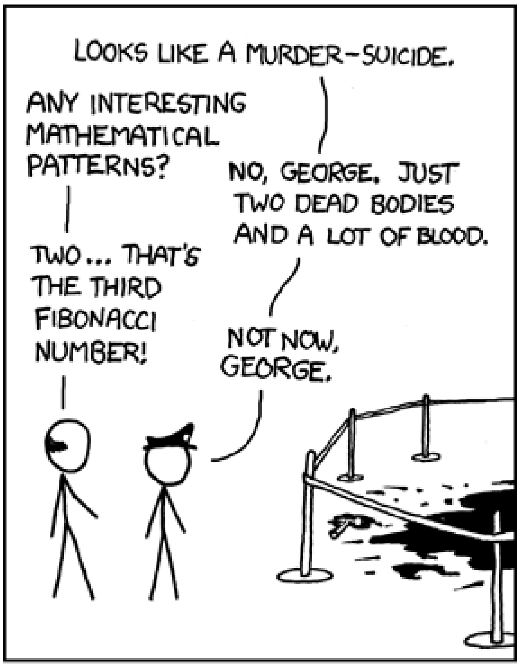
Normes, espaces vectoriels normés

Cours 3

Exercices 13

Pour bien démarrer

1. Peut-on mesurer une distance entre deux réels ? Entre deux complexes ?
2. Dans $\mathbb{C}$, qu'est ce qu'un disque ?
3. Peut-on mesurer une distance entre deux vecteurs ?
4. Comment quantifier qu'une suite est convergente ?
5. Comment quantifier que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$?
6. Qu'est-ce qu'un produit scalaire ?
7. Donner quelques exemples de produits scalaires.
8. Qu'est-ce que l'inégalité de Cauchy-Schwarz ? À quoi correspond le cas d'égalité ?
9. Quelle est la norme associée à un produit scalaire ?



WHEN MATHNET SHUT DOWN, THE OFFICERS HAD TROUBLE REINTEGRATING INTO THE REGULAR L.A.P.D.

Lu dans le programme officiel

La comparaison effective de deux normes n'est pas un objectif du programme. On se limite en pratique à des exemples élémentaires. La démonstration de l'équivalence des normes en dimension finie est hors programme.
La notion de norme subordonnée est hors programme.

Dans tout le chapitre, sauf mention contraire :
E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, éventuellement muni d'une norme $\|\cdot\|$.
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Normes

1.1 Définitions

Définition. Une application $N : E \to \mathbb{R}$ est une **norme** sur E si et seulement si elle vérifie :

- Positivité : $\forall x \in E,\ N(x) \geqslant 0$
- Séparation : $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \implies x = 0_E$
- Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$
- Homogénéité : $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

Si E est muni d'une norme, on dit que c'est un **espace vectoriel normé**.

Remarque.

- *On abrègera dans le cours « espace vectoriel normé » par « e.v.n. »*
- *Lorsqu'il y a un risque d'ambiguité (plusieurs normes possibles), c'est le couple (E, N) qui est appelé e.v.n.*
- *On note en général $\|x\|$, et non $N(x)$, la norme du vecteur x.*
- *Lorque $\|x\| = 1$, on dit que x est un vecteur **unitaire**.*

Définition. On appelle **distance associée à** $\|\cdot\|$ l'application :

$$\begin{array}{rccl} d : & E^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & \|y-x\| \end{array}$$

Proposition. Pour tous vecteurs de E, on a :

- $\|0_E\| = 0$
- $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x-y\| \qquad \big(\leqslant \|x\| + \|y\|\big)$
- $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x+y\| \qquad \big(\leqslant \|x\| + \|y\|\big)$

Proposition. Pour tous vecteurs de E, on a :

- $d(x,y) \geqslant 0$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,y) = 0 \implies x = y$
- $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

Proposition. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors la norme sur E induit une norme sur F.

1.2 Normes usuelles

Théorème.

Si E est un espace préhilbertien réel, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne son produit scalaire, alors l'application définie par :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

définit une norme sur E, appelée **norme euclidienne** associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition. Pour $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, on définit :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |x_i|, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2}, \qquad \|x\|_\infty = \underset{1 \leqslant i \leqslant p}{\text{Max}} |x_i|$$

appelées respectivement les **normes 1, 2 et infinie**.

Théorème.

$\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^p$.

Exemple. Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en notant $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on définit :

$$\|M\|_1 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |m_{ij}|, \qquad \|M\|_2 = \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |m_{ij}|^2} = \sqrt{\operatorname{tr}(M^\top M)}, \qquad \|M\|_\infty = \underset{1 \leqslant i,j \leqslant n}{\text{Max}} |m_{ij}|$$

Ce sont des normes.

Exemple. Sur $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, on définit pour $f \in E$:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| \, \mathrm{d}x \text{ et } \|f\|_\infty = \underset{x \in [0,1]}{\text{Sup}} |f(x)|$$

Ce sont des normes sur E.

Exemple. Dans $E = \mathbb{K}[X]$, on définit pour $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$:

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i| \text{ et } N_\infty(P) = \underset{i \in \{0, \ldots, n\}}{\text{Max}} |a_i|$$

Ce sont des normes sur E.

1.3 Comparaison des normes

Définition. Deux normes N_1 et N_2 sont dites **équivalentes** si et seulement s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in E, \ \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$$

Remarque. *C'est une relation d'équivalence.*

Exemple. Dans $\mathbb{K}^p$, les normes $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ sont deux à deux équivalentes.

Théorème.

Si E est de dimension finie, deux normes sur E sont équivalentes.

Preuve. Hors programme. □

Remarque. *Dans E de dimension infinie, deux normes peuvent ne pas être équivalentes.*

Exemple. On peut utiliser $P_n = 1 + X + \cdots + X^{n-1} + X^n$ dans $E = \mathbb{K}[X]$ pour montrer que les deux normes N_1 et N_2 précédentes ne sont pas équivalentes.

Remarque. *Pour justifier que deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, on cherche une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E telle que $N_1(x_n) \to 0$ et $N_2(x_n) \not\to 0$ ou alors $N_1(x_n) \to +\infty$ et $N_2(x_n) \not\to +\infty$.*

1.4 Parties bornées

Définition. Une partie A de E est dite **bornée** lorsqu'il existe $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in A,\ \|x\| \leqslant M$$

Proposition. Le caractère borné d'une partie de E dépend *a priori* du choix de la norme. Mais si deux normes sont équivalentes, les parties bornées pour l'une sont les parties bornées pour l'autre.

Proposition.

- Toute intersection de parties bornées est bornée.
- Toute union finie de parties bornées est bornée.

Remarque. *Pour l'intersection, il suffit en fait qu'une seule des parties soit bornée. Pour la réunion, c'est faux dans le cas d'une union infinie.*

Exemple. Donner un exemple non borné d'union infinie de parties bornées.

1.5 La norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$

Proposition. Pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+$:

$$\mathrm{Sup}\{kx,\ x \in A\} = k\,\mathrm{Sup}(A)$$

Remarque. *Hormis cette proposition, on ne peut pas faire de calcul directement avec des* Sup. *On travaille sur le « supande ».*

Définition. Pour X ensemble non vide, on note $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{K}$ qui sont bornées, c'est-à-dire pour lesquelles :

$$\exists M \geqslant 0,\ \forall x \in X,\ |f(x)| \leqslant M$$

Théorème.

$\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel, que l'on peut munir d'une norme en posant :

$$\|f\|_\infty = \mathop{\mathrm{Sup}}_{x \in X} |f(x)|$$

Remarque. *Il faut savoir rédiger la démonstration de l'inégalité triangulaire.*

2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

2.1 Suites convergentes

Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E^{\mathbb{N}}$ est dite **convergente** si et seulement s'il existe $\ell \in E$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geqslant n_0,\ \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$$

On dit qu'elle est **divergente** sinon.

Proposition. En cas de convergence, ℓ est unique et s'appelle **la limite** de $(u_n)_n$. On note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Remarque. *On trouve aussi la notation* $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *que l'on évitera d'utiliser.*

Remarque. *Dans un e.v.n. autre que* $\mathbb{R}$*, ça n'aurait pas de sens de vouloir définir une limite infinie.*

La proposition qui suit est immédiate :

Proposition. La suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ si et seulement si la suite numérique $(\|u_n - \ell\|)_n$ converge vers 0.

Son intérêt est qu'elle donne un mode de démonstration. Pour montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, on cherche à majorer $\|u_n - \ell\|$ par une quantité qui tend vers 0.

Exemple. Étudier la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $M_n = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} & \frac{1}{n} \\ \mathrm{e}^{-n} & n\sin\frac{1}{n} \end{pmatrix}$.

Exemple. Dans $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, étudier la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $f_n \,:\, t \mapsto t^n$.

2.2 Suites bornées

Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| \leqslant M$$

Théorème.

> Toute suite convergente est bornée.

Proposition. Une partie A de E n'est pas bornée si et seulement s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que :

$$\|u_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

2.3 Indépendance au choix de la norme

A priori, la définition de la convergence et la valeur de la limite dépendent du choix de la norme. De même, le caractère borné de la suite dépend du choix de la norme.

Théorème.

> La convergence d'une suite et la valeur de sa limite (resp. son caractère borné) sont invariants par changement de norme en une norme équivalente.

Remarque. *C'est un résultat plutôt théorique. Il nous permet, en dimension finie, de choisir une norme adaptée au problème, qui engendre moins de calculs.*

2.4 Opérations sur les suites convergentes

Proposition. Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ'. Soit α et β deux scalaires. Alors la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)_n$ est convergente, de limite $\alpha\ell + \beta\ell'$.

Corollaire. L'ensemble des suites convergentes est donc un espace vectoriel.

Proposition. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\|u_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|\ell\|$.

La réciproque est bien sûr fausse.

2.5 Suites extraites

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Une **suite extraite** de $(u_n)_n$ est une suite de la forme :

$$(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$$

où $\varphi \,:\, \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Remarque. *L'application φ s'appelle une **extractrice**.*

Exemple. On utilise souvent les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$. On peut rencontrer $(u_{3n})_n$ ou $(u_{n^2})_n$ ou d'autres suites extraites plus abstraites.

Théorème.

> Si $(u_n)_n$ converge vers ℓ, alors toute suite extraite de $(u_n)_n$ converge vers la même limite.

Corollaire. S'il existe deux suites extraites de $(u_n)_n$ qui convergent vers des limites distinctes, alors $(u_n)_n$ est une suite divergente.

Théorème.

> Si les deux suites extraites des termes d'indices pairs $(u_{2n})_n$ et impairs $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite ℓ, alors $(u_n)_n$ est convergente, de limite ℓ.

Remarque. *Ce résultat ne se généralise pas à « quelques suites extraites convergentes ». Il faut bien sûr que les limites soient les mêmes.*

Exemple. La suite $(\cos n\frac{\pi}{2})_n$ est-elle convergente ? Et $(\sin n)_n$?

Exemple. Soit B une matrice antisymétrique, telle que la suite des puissances $(B^n)_n$ converge vers une matrice C. Montrer que $C = 0$.

2.6 Convergence par coordonnées

On suppose ici que E est un espace vectoriel de dimension finie p, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.

Définition. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E. À n fixé, u_n s'écrit de façon unique sous la forme :

$$u_n = u_n^1 e_1 + u_n^2 e_2 + \cdots + u_n^p e_p$$

où $(u_n^1, u_n^2, \dots, u_n^p)$ est le p-uplet des coordonnées de u_n dans la base $\mathcal{B}$.
Pour chaque $k \in \{1, \dots, p\}$, la suite numérique $(u_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ est la **k-ème suite coordonnée** de $(u_n)_n$ dans la base $\mathcal{B}$.

Théorème.

> Avec les notations précédentes, $(u_n)_n$ converge si et seulement si les p suites-coordonnées $(u_n^k)_n$ convergent.
> Dans ce cas, en notant $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et, pour tout k, $u_n^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_k$, on a :
>
> $$\ell = \ell_1 e_1 + \ell_2 e_2 + \cdots + \ell_p e_p$$

Exemple. Étudier la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n & \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} & \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \end{pmatrix}$$

3 Fonctions à valeurs dans un e.v.n. : limite et continuité en un point

Dans ce paragraphe, E, F et G sont des e.v.n. sur $\mathbb{K}$ et X un ensemble quelconque, non vide.

3.1 Limite d'une fonction en un point

Définition. Soit $f : A \subset E \to F$ une fonction et $a \in E$. On dit que f **a une limite en** a si et seulement s'il existe $\ell \in F$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ t.q. } \forall x \in A,\ \|x - a\| \leqslant \eta \implies \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon$$

Remarque. *Pour que cette définition ait un sens, il faut que a soit dans A ou au bord de A. On dira que a est adhérent à A.*

Proposition. En cas d'existence, ℓ est unique et s'appelle **la limite de f en a**. On note $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

Remarque. *On trouve aussi la notation $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ que l'on évitera d'utiliser.*

Il est immédiat que :

Proposition. $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ si et seulement si $\|f(x) - \ell\| \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

Pour montrer que $f(x) \to \ell$, on cherche donc à majorer $\|f(x) - \ell\|$.

Théorème (caractérisation séquentielle).

> Soit $f : A \subset E \to F$ une fonction, et $a \in E$ un point adhérent à A.
> La fonction f admet une limite en a, notée ℓ, si et seulement si pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de A convergeant vers a, la suite $(f(u_n))_n$ est convergente.
> Dans ce cas, les suites $(f(u_n))_n$ ont toutes pour limite ℓ.

Corollaire. S'il existe deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ d'éléments de A qui convergent vers a, et telles que les suites $(f(u_n))_n$ et $(f(v_n))_n$ convergent vers des valeurs distinctes, alors f n'a pas de limite en a.

Exemple. $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ a-t-elle une limite en 0 ?

3.2 Indépendance au choix de la norme

A priori, la définition de l'existence de la limite d'une fonction et la valeur de cette limite dépendent du choix de la norme.

Théorème.

> Dans un e.v.n. de dimension finie, l'existence de la limite d'une fonction et la valeur de cette limite sont indépendantes du choix de la norme.

Remarque. *On peut aussi remplacer une norme par une autre norme qui lui est équivalente, sans changer l'existence et la valeur de la limite d'une fonction.*

3.3 Fonctions bornées

Remarque. *L'ensemble des fonctions : $X \to E$, noté $\mathcal{F}(X, E) = E^X$ est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel.*

Définition. Une fonction : $X \to E$ est dite **bornée** si et seulement si l'ensemble :

$$\begin{aligned} f(X) &= \{y \in E \text{ t.q. } \exists x \in X,\ y = f(x)\} \\ &= \{f(x),\ x \in X\} \end{aligned}$$

est une partie bornée de E.

Remarque. *Cela signifie qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que :*

$$\forall x \in X,\ \|f(x)\| \leqslant M$$

Proposition. Si f a une limite (finie) en a, alors f est bornée au voisinage de a.

3.4 Opérations algébriques sur les limites, composition

Proposition. Soit f et g deux fonctions $A \subset E \to F$, λ, μ deux scalaires. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell'$, alors $\lambda f + \mu g$ admet une limite en a et :

$$(\lambda f + \mu g)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda\ell + \mu\ell'$$

Proposition. Soit $f : A \subset E \to F$ et $\varphi : A \subset E \to \mathbb{K}$ une fonction scalaire. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $\varphi(x) \xrightarrow[x\to a]{} \phi$. Alors φf admet une limite en a et :

$$(\varphi f)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \phi\ell$$

Proposition. Soit $f : A \subset E \to F$ et $g : B \subset F \to G$. On suppose que $f(A) \subset B$ pour pouvoir envisager $g \circ f : A \subset E \to G$.
Soit a un point adhérent à A. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$, alors b est adhérent à B. Et si de plus $g(y) \xrightarrow[y\to b]{} c$, alors $g \circ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} c$.

3.5 Limite par coordonnées

Définition. Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ une base de F et $f : A \subset E \to F$. Pour tout $x \in A$, $f(x)$ s'écrit de façon unique sous la forme :

$$f(x) = f_1(x)e'_1 + \dots + f_p(x)e'_p = \sum_{i=1}^{p} f_i(x)e'_i$$

On définit ainsi p **fonctions coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}'$** $f_i : A \subset E \to \mathbb{K}$.

Proposition. Avec les notations de la définition, pour a adhérent à A, f a une limite en a si et seulement si chaque fonction coordonnée a une limite en a.
Dans ce cas, en notant $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et, pour tout i, $f_i(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_i$, on a :

$$\ell = \ell_1 e'_1 + \dots + \ell_p e'_p$$

3.6 Continuité en un point

Définition. Soit $f : A \subset E \to F$ et a un point de A. On dit que f est **continue en** a si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$.

Remarque.

- *On définit parfois simplement que « f est continue en a » par « f a une limite en a », car cette limite ne peut être que $f(a)$ en un point où f est définie.*
- *Le point de vue développé ici est local. Seul le comportement de f au voisinage de a peut influencer la continuité en a.*
- *Comme c'est un cas particulier de limite, toutes les propositions du paragraphe précédent se transposent en termes de continuité : caractérisation séquentielle, caractère localement borné, combinaison linéaire, multiplication par une fonction scalaire, composition, lien avec les fonctions coordonnées.*

Formalisons néanmoins les deux dernières propositions :

Proposition. Soit $f : A \subset E \to F$ et $g : B \subset F \to G$. On suppose que $f(A) \subset B$ pour pouvoir envisager $g \circ f : A \subset E \to G$.
Si f est continue en a et g continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Proposition. On reprend les notations du § 3.5. f est continue en a si et seulement si chaque fonction coordonnée f_i est continue en a.

4 Fonctions à valeurs dans un e.v.n. : continuité sur une partie

Dans ce paragraphe, E, F et G sont des e.v.n. sur $\mathbb{K}$ et X un ensemble quelconque, non vide.

4.1 Généralités

Définition. Une fonction $f : A \subset E \to F$ est dite **continue sur** A si et seulement si elle est continue en tout point de A.

On note $\mathcal{C}^0(A, F)$ l'ensemble des fonctions continues sur A, à valeurs dans F.

Remarque.

- *Comme la continuité sur un ensemble est la continuité en chaque point de cet ensemble, la plupart des propositions du paragraphe précédent se transposent en termes de continuité sur un ensemble : combinaison linéaire, multiplication par une fonction scalaire continue, composition, lien avec les fonctions coordonnées.*
- $\mathcal{C}^0(A, F)$ *est un espace vectoriel.*
- *On verra que l'aspect global de la continuité permet d'obtenir d'autres types de résultats.*

4.2 Fonctions lipschitziennes

Définition. Soit $f : A \subset E \to F$. On dit que f est **lipschitzienne** si et seulement s'il existe $k \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x, y \in A,\ \|f(y) - f(x)\| \leqslant k\|y - x\|$$

Pour un k convenant, on dit que f est k-lipschitzienne.

Exemple. $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne.

Remarque. *L'inégalité des accroissements finis permet de justifier qu'une fonction* $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *est lipschitzienne sur tout segment.*

Proposition. La composée de deux fonctions lipschitziennes est lipschitzienne.

Proposition. Toute fonction lipschitzienne sur A est continue sur A.

Exemple. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, et n'y est pourtant pas lipschitzienne.

4.3 Fonctions automatiquement continues

4.3.1 Applications linéaires

Remarque. *Pour une application linéaire, étudier la continuité en* a *revient à l'étudier en* 0.

Théorème.

> En dimension finie, toute application linéaire est continue.

Proposition. Mieux : en dimension finie, toute application linéaire est lipschitzienne.

Exemple. La trace, la transposition sont des applications continues.

4.3.2 Applications polynomiales

Définition. Dans un espace vectoriel muni d'un produit, on peut définir les applications polynomiales. Ce sont les applications dont les fonctions coordonnées sont des combinaisons linéaires de produits de puissances des coordonnées des variables.

Résultat.

> En dimension finie, toute application polynomiale est continue.

4.3.3 Applications multilinéaires, déterminant

Résultat.

En dimension finie, toute application multilinéaire est continue.

Exemple.

- $\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \mapsto & AB \end{array}$ est continue.
- Dans E espace euclidien, le produit scalaire est continu.
- L'application déterminant est continue.

5 Exercices et résultats classiques à connaître

5.1 Savoir rédiger que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme

204.1

Sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme.

5.2 Une suite à la fois bornée et non bornée

204.2

Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P) = \operatorname*{Sup}_{t\in[-1,1]} |P(t)|$$

(a) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) On considère la suite de terme général $P_n = \frac{1}{n}X^n$. Est-elle bornée pour la norme N_1 ? pour la norme N_2 ?

(c) Les deux normes sont-elles équivalentes ?

5.3 Continuité des applications linéaires

204.3

Soient E, F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$.

(a) Démontrer que si u est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

(i) u est continue sur E.

(ii) u est continue en 0.

(iii) $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant k\|x\|$.

(b) Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par $\|f\| = \operatorname*{Sup}_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démontrer que φ est linéaire et continue.

204.4

Soit u une application linéaire continue de E dans F, espaces vectoriels non nuls. On définit :

$$\begin{aligned} M_1 &= \operatorname{Sup}\left\{\frac{\|u(x)\|}{\|x\|},\ x \in E \setminus \{0\}\right\} \\ M_2 &= \operatorname{Sup}\{\|u(x)\|,\ x \in E \text{ t.q. } \|x\| = 1\} \\ M_3 &= \operatorname{Inf}\{k \geqslant 0 \text{ t.q. } \forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant k\|x\|\} \end{aligned}$$

(a) Justifier l'existence de ces nombres.

(b) Montrer que $M_1 = M_2 = M_3$.

Remarque. *On note en général $|||u|||$ ce nombre, et on peut montrer que $|||\cdot|||$ définit sur $\mathcal{L}(E,F)$ une norme. Cette norme s'appelle* ***la norme subordonnée*** *à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$, et elle satisfait :*

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leqslant |||u|||\ \|x\|_E$$

6 Compléments de cours

6.1 Complément : distance à une partie

Définition. Pour A partie de E et $x \in E$, on appelle **distance** de x à A le nombre :

$$d(x,A) = \operatorname*{Inf}_{a\in A} \|x - a\|$$

Remarque. *Lorsque A est un sous-espace vectoriel de E et que la norme est euclidienne, cette distance est réalisée de façon unique par le projeté orthogonal de x sur A.*

Remarque. *Lorsque A est une partie quelconque, le calcul de cette distance peut être délicat.*

Exercices de mathématiques

Norme

204.5

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note :

$$N(x, y) = \text{Max}(|x|, |x + y|)$$

(a) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Représenter la boule unité centrée à l'origine pour cette norme.

(c) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$N(x, y) \leqslant 2\|(x, y)\|_\infty \text{ et } \|(x, y)\|_\infty \leqslant 2N(x, y)$$

204.6

Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

(a) Montrer que l'on définit deux normes sur E, en posant pour $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$:

$$\|P\| = \int_0^1 |P(t)| \mathrm{d}t \qquad \|P\|_1 = \sum_{i=0}^{p} |a_i|$$

(b) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \|P\| \leqslant \alpha \|P\|_1$.

(c) Existe-t-il $\beta > 0$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \|P\|_1 \leqslant \beta \|P\|$.

Suites dans un e.v.n.

204.7

Soit u une suite de l'evn E convergeant vers ℓ.
$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$.
Établir que w est convergente et déterminer sa limite.

204.8

Étudier la suite $((a_n, b_n))$ de $\mathbb{R}^2$ définie par : $(a_0, b_0) \neq (0, 0)$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n^2 + b_n^2}$ et $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{a_n^2 + b_n^2}$.

204.9

À quelle condition sur $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ existe-t-il une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que :

$$M^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} A$$

Continuité dans un e.v.n.

204.10

Montrer que $X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \mapsto \dfrac{X}{\|X\|_2}$ n'a pas de limite en $(0, 0, 0)$.

204.11

On définit f sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \dfrac{\sin(xy)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0, y) = y$.
En utilisant $\varphi : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$, montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

204.12

(a) $g\ :\ (x,y) \neq (0,0) \mapsto \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ admet-elle une limite en $(0,0)$?

(b) Même question avec $f\ :\ (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{x^4+y^2}{xy}$?

204.13

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_1$ et on note :

$$f\ :\ (x,y) \mapsto (ax, by)$$

Montrer que f est lipschitzienne.

204.14

Soit $T\ :\ P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(0)$. On munit $\mathbb{R}[X]$ des deux normes suivantes :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ N_1(P) = \operatorname*{Sup}_{t\in[-1,1]} |P(t)| \text{ et } N_2(P) = \operatorname*{Sup}_{t\in[1,2]} |P(t)|$$

T est-elle continue pour N_1 ? pour N_2 ?
En cas de continuité, déterminer $|\!|\!| T |\!|\!|$.

204.15

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni de $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f|$. On note :

$$\begin{array}{rccc} \varphi\ : & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \displaystyle\int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f \end{array}$$

Montrer que φ est linéaire lipschitzienne. Calculer $|\!|\!| \varphi |\!|\!|$.

204.16

On note ℓ^∞ l'espace vectoriel normé formé des suites réelles bornées $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muni de la norme définie par :

$$\|x\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

On considère l'opérateur :

$$\begin{array}{rccc} \Delta\ : & \ell^\infty & \to & \ell^\infty \\ & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{où } y_n = x_{n+1} - x_n \end{array}$$

Montrer que Δ est linéaire et continue.

Petits problèmes d'entrainement

✍ **204.17**

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Pour $f \in E$, on note :

$$N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t \text{ et } \|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

(a) Montrer que N est une norme sur E.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(\pi n x)$$

b1. Calculer $\|f_n\|_\infty$ et $N(f_n)$.

b2. Vérifier que la suite $(f_n)_n$ converge vers 0 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et ne converge pas vers 0 pour la norme N.

(c) Montrer qu'il n'existe pas de constante C telle que :

$$\forall f \in E,\ N(f) \leqslant C\|f\|_\infty$$

(d) Montrer que :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_\infty \leqslant N(f)$$

✍ **204.18**

On considère, dans $\mathbb{R}^3$, $(Z_n) = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ définie par :

$$Z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{6}w_n + \frac{1}{2} \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{6}v_n - \frac{1}{3}w_n - \frac{2}{3} \\ w_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{6}w_n - \frac{7}{6} \end{cases} .$$

(a) Montrer que la suite (Z_n) vérifie une relation matricielle de la forme : $Z_{n+1} = AZ_n + B$.

(b) Montrer $\exists k \in]0,1[$ t.q. $\forall X \in \mathbb{R}^3$, $\|AX\|_\infty \leqslant k\|X\|_\infty$.

(c) Montrer que l'équation $X = AX + B$ admet une unique solution L dans $\mathbb{R}^3$.

(d) En déduire une inégalité concernant $\|Z_n - L\|_\infty$, $\|Z_0 - L\|_\infty$, n et k. Conclure quant à la convergence de la suite (Z_n).

204.19

On note L le $\mathbb{R}$-e.v. des applications lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, et $E_1 = \mathcal{C}^1([0,1] \to \mathbb{R})$.

(a) Montrer que $\|\cdot\| \,:\, L \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\|f\| = |f(0)| + \operatorname*{Sup}_{\substack{x,y\in[0,1] \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|}$$

est une norme sur L, et qu'elle n'est pas équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.

(b) Montrer que $N_1 \,:\, E_1 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$N_1(f) = |f(0)| + \operatorname*{Sup}_{t\in[0,1]} |f'(t)|$$

est une norme sur E_1, et qu'elle coïncide avec $\|\cdot\|$.

204.20

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On suppose que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice notée P.

Montrer que P et A commutent et que P est une matrice de projection.

204.21

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On note E_∞ cet espace lorsqu'il est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et E_1 lorsqu'il est muni de la norme $\|\cdot\|_1$. On rappelle que $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$.
Pour $f \in E$ et $x \in [0,1]$, on pose :

$$u(f)(x) = \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que l'on définit ainsi u, un endomorphisme de E.

(b) Montrer qu'en tant qu'application de E_∞ vers E_1, u est continue.

(c) Montrer qu'en tant qu'application de E_1 vers E_∞, u est continue.

204.22

Soit E un espace vectoriel normé, et $(u_n)_n$ uen suite d'éléments de E. On envisage les trois propositions suivantes :

(i) la suite $(u_n)_n$ converge ;

(ii) les deux suites $(u_{2n})_n$ et (u_{2n+1}) convergent ;

(iii) les trois suites $(u_{2n})_n$, (u_{2n+1}) et $(u_{3n})_n$ convergent.

(a) Les propositions (i) et (ii) sont-elles équivalentes ?

(b) Les propositions (i) et (iii) sont-elles équivalentes ?

204.23

On note $E = \mathcal{C}^\circ([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Calculer $d(0, A)$ dans le cas où :

(a) $A = \{f \in E,\ f(0) = 1 \text{ et } \displaystyle\int_0^1 f = 0\}$

(b) $A = \{f \in E,\ f(0) = 0 \text{ et } \displaystyle\int_0^1 f = 1\}$