Suites de fonctions

Cours

Pour bien démarrer

1. Pour une fonction, comment est définie sa norme infinie ?

2. Selon les valeurs de x réel, que peut-on dire de la suite $\left(\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\right)$?

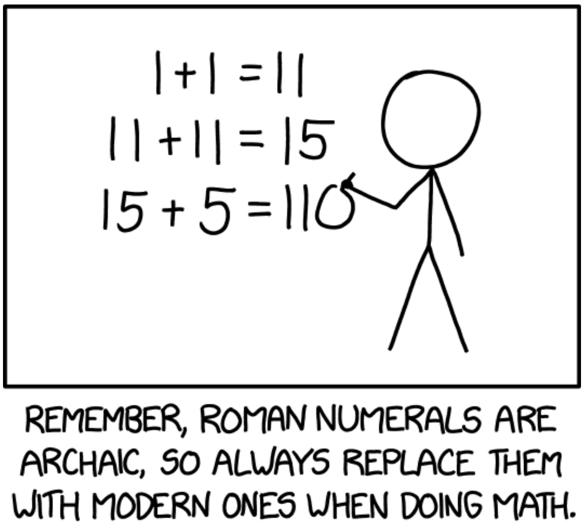
3. Y a-t-il une différence entre

$$\forall x \in [0,1[,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0,\ |x^n| \leqslant \varepsilon \ ?$$

et

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall x \in [0,1[,\ \forall n \geqslant n_0,\ |x^n| \leqslant \varepsilon \ ?$$

4. Que vaut $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(\lim\limits_{n \to +\infty} (x^n)\right)$? et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x^n)\right)$?



https://xkcd.com/2637

Lu dans le programme officiel

La démonstration du théorème de la double limite est hors programme.
Les étudiants peuvent appliquer directement le théorème concluant au caractère $\mathcal{C}^k$ de la limite sous l'hypothèse de convergence simple des $(f_n^{(j)})_n$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme de $(f_n^{(k)})_n$ sur tout segment de I.
La démonstration du théorème de convergence dominée est hors programme. L'hypothèse de continuité par morceaux de f, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1 Quelques exemples

Exemple. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$f_n \;:\; \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$$

1. Représenter quelques fonctions f_n.
2. Est-ce que $(f_n(x))_n$ admet une limite ?
3. Continuité ?

Exemple. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$f_n \;:\; \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n^2x(1-x^2)^n \end{array}$$

1. Représenter quelques fonctions f_n.
2. Est-ce que $(f_n(x))_n$ admet une limite ?
3. Intégrale sur $[0,1]$?

Exemple. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$f_n \;:\; \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} \end{array}$$

1. Est-ce que $(f_n(x))_n$ admet une limite ?
2. Dérivées ?

Remarque. *La convergence « point à point » des suites de fonctions ne permet pas le passage à la limite dans la continuité, le calcul d'intégrales, la dérivation.*

2 Convergence simple

2.1 Définition

Définition. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction. On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement sur** I vers f si et seulement si, pour tout $x \in I$ **fixé**, la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$. La fonction f s'appelle alors la **limite simple** de la suite de fonctions $(f_n)_n$.

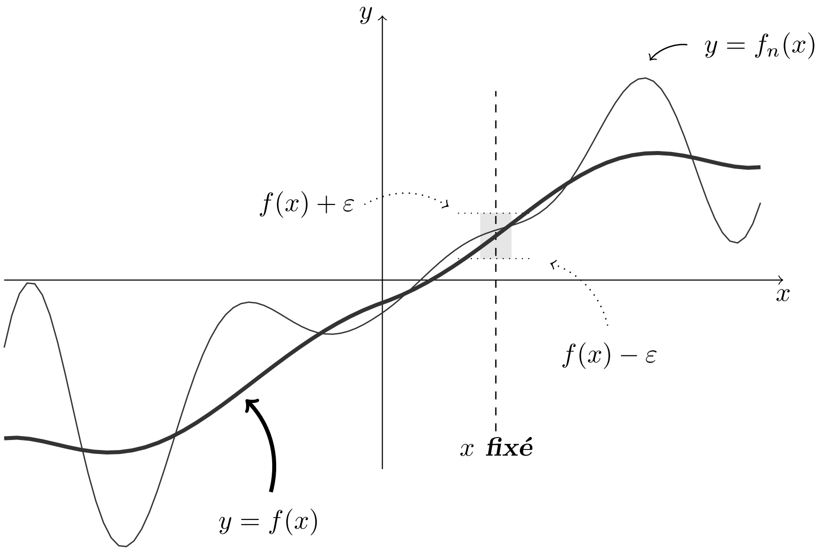
Remarque.

- *$(f_n)_n$ **converge simplement sur** I si et seulement s'il existe f telle que $(f_n)_n$ converge simplement vers f.*
- *Étudier la convergence simple de $(f_n)_n$, c'est étudier la convergence de la suite $(f_n(x))_n$ à x fixé.*
- *On trouve parfois la notation $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$.*
- *On peut quantifier la proposition « $(f_n)_n$ converge simplement vers f » :*

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geqslant N,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Dans cette quantification, l'indice N à partir duquel $f_n(x)$ approche $f(x)$ à ε près dépend de x.

Interprétation graphique.



Exemple. Étudier la convergence simple des suites de fonctions définies par :

1. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ où $f_n(x) = x^n$
2. $g_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ où $g_n(x) = \dfrac{1}{n+x^2}$
3. $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où $h_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } |x| \leqslant \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$

2.2 Propriétés

Proposition. Si $B \subset I$ et si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f_{|B}$ sur B.

Proposition. Si les suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement vers f et g sur I et si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors la suite de fonctions $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\lambda f + \mu g$ sur I.

3 Convergence uniforme

3.1 Définition, mode d'étude

Proposition. On note $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions : $I \to \mathbb{K}$ qui sont bornées. Cet espace vectoriel est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ appelée **norme de la convergence uniforme** ou norme infinie :

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{x\in I} |f(x)|$$

Remarque. *S'il y a une risque d'ambiguïté, on note* $\|\cdot\|_\infty^I$

Définition. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction. On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément sur** I vers f si et seulement si la suite numérique $(\|f_n - f\|_\infty)_n$ converge vers 0. La fonction f est alors appelée **limite uniforme** de $(f_n)_n$.

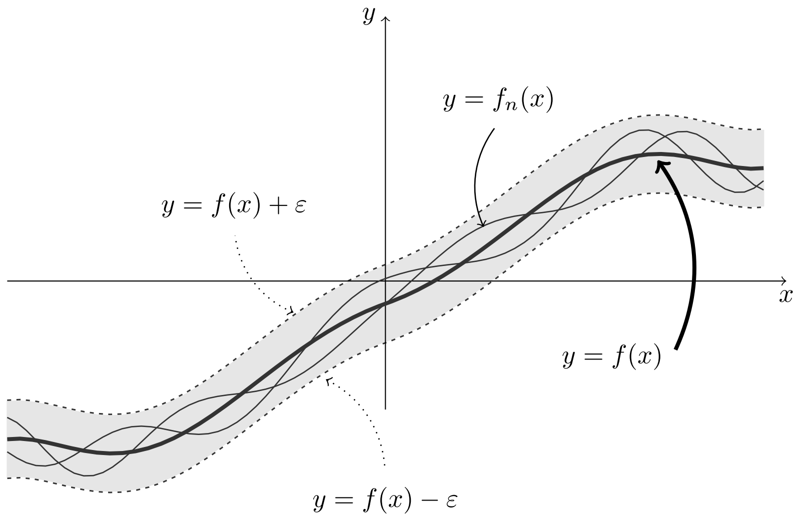
Remarque.

- *Lorsque toutes les fonctions qui interviennent sont bornées, il s'agit de la convergence dans l'espace vectoriel normé* $(\mathcal{B}(I,\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ *au sens du chapitre 204.*
- *Pour que cette définition ait un sens, on doit naturellement supposer que, pour tout* n*, la fonction* $f - f_n$ *soit bornée sur* I*.*
- *On trouve parfois la notation* $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$*.*
- *On peut quantifier la proposition «* $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* f *» :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geqslant N,\ \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Dans cette quantification, l'indice N *à partir duquel* $f_n(x)$ *approche* $f(x)$ *à* ε *près est indépendant de* x*. C'est le même pour tout* x*, on dit qu'il est uniforme, ce qui donne son nom à ce mode de convergence de la suite de fonctions.*

Interprétation graphique.



Théorème.

La convergence uniforme implique la convergence simple.

Remarque.

- *La réciproque est fausse.*
- *Si une suite de fonctions* $(f_n)_n$ *converge uniformément, sa limite uniforme coïncide avec sa limite simple.*

Étude pratique pour montrer la convergence uniforme.

- On commence par déterminer la limite simple de $(f_n)_n$, notée f.
  Une représentation graphique peut aider.
- On cherche à majorer $|f_n(x) - f(x)|$ **indépendamment** de x par une suite qui converge vers 0.
- La recherche précise de $\|f_n - f\|_\infty$ peut se faire par l'étude des variations de $f_n - f$.

Étude pratique pour montrer la non-convergence uniforme.

- On commence par déterminer la limite simple de $(f_n)_n$, notée f.
  Une représentation graphique peut aider.
- On peut montrer le non-transfert à la limite d'une propriété (voir § 4 et § 5).
- On exhibe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de I telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_n$ ne converge pas vers 0.

Exemple. Étudier la convergence uniforme des trois suites de fonctions :

1. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ où $f_n(x) = x^n$
2. $g_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ où $g_n(x) = \dfrac{1}{n+x^2}$
3. $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où $h_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } |x| \leqslant \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$

3.2 Propriétés

Proposition. Si $B \subset I$ et si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur B.

Proposition. Si les suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément vers f et g sur I et si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors la suite de fonctions $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\lambda f + \mu g$ sur I.

3.3 Convergence uniforme sur tout segment

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions $I : \mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que $(f_n)_n$ **converge vers f uniformément sur tout segment de I** si et seulement si pour tout segment $[a,b] \subset I$, $(f_{n|[a,b]})_n$ converge uniformément vers $f_{|[a,b]}$ sur $[a,b]$.

Exemple. Étudier la convergence uniforme sur tout segment des trois suites de fonctions :

1. $f_n :]0,1[\to \mathbb{R}$ où $f_n(x) = x^n$
2. $g_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ où $g_n(x) = \dfrac{1}{n+x^2}$
3. $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où $h_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } |x| \leqslant \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$

Remarque. *La convergence uniforme sur tout segment de I n'est pas équivalente à la convergence uniforme sur I. C'est une notion plus faible, mais on verra qu'elle pourra suffire à transmettre à la limite certaines propriétés.*

Exemple.

1. Utiliser la formule de Taylor avec reste-intégral pour montrer : $t - \dfrac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$ pour tout $t \geqslant 0$.
2. Étudier la convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ de la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

4 Continuité de la limite

Transfert de continuité par convergence uniforme

Théorème.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I.
Si :

- pour tout n, f_n est continue sur I,
- $(f_n)_n$ converge uniformément sur I vers f,

alors :

- f est continue sur I.

Remarque.

- *La convergence simple ne suffit pas pour justifier la continuité de f, comme le montre l'exemple des fonctions $f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$.*
- *La continuité des f_n et de f ne suffit pas à justifier la convergence uniforme, comme le montre l'exemple des fonctions $f_n : x \in [0,1] \mapsto n^2x(1-x^2)^n$.*

Corollaire. Si $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers f, que les f_n sont continues sur I mais que f n'est pas continue sur I, alors la convergence n'est pas uniforme sur I.

Raisonnement classique. Si $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers f, que les f_n sont continues sur I et qu'il y a convergence uniforme sur tout segment $[a,b]$ de I, alors f est continue sur tout $[a,b] \subset I$ donc sur I.

Remarque. *Ce résultat, qui exploite le caractère local de la continuité, s'adapte aussi lorsque la convergence uniforme est vérifiée sur une famille d'intervalles adaptés à la situation.*

5 Intégration

5.1 Intégration sur un segment et convergence uniforme

Théorème d'interversion limite-intégrale par cv uniforme sur un segment.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un segment $[a,b]$.
Si :

- $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$,
- $[a,b]$ est un segment,
- les f_n sont continues.

alors :

- la suite $\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ converge,
- $\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque. *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites envisagées et de mode de convergence de la suite de fonctions.

Remarque. *Le théorème de convergence dominée étudié au § 5.2 fournit un autre critère pour intégrer la limite d'une suite de fonctions, y compris lorsque l'intégrale est généralisée.*

Exemple. Étudier la convergence de la suite de terme général :

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{n \sin\left(\frac{t^2}{n}\right) + 1}$$

On donne l'encadrement $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$.

5.2 Intégration sur un intervalle quelconque – Convergence dominée

Remarque. *Le théorème qui suit s'applique en particulier lorsque les intégrales sont généralisées.*

Théorème de convergence dominée.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I.
Si :

- $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I ;
- $(f_n)_n$ satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$$

  où φ indépendante de n et **intégrable** sur I ;
- les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur I.

alors :

- les fonctions f_n et f sont intégrables sur I,
- la suite $\left(\displaystyle\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ converge,
- $\displaystyle\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$

Preuve. La démonstration est hors programme. □

Remarque.

- *La 3e hypothèse, de régularité, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination, qu'il faut nommer et sur laquelle il faut insister lors de l'utilisation de ce théorème.*
- *La **fonction dominante** φ est bien-sûr positive (elle majore $|f_n|$) et continue par morceaux (elle est intégrable). C'est sur son intégrabilité qu'il faut insister.*
- *Lorsque I est un segment, on peut prendre une fonction dominante constante.*
- *Il est fréquent que, à t fixé, $(f_n(t))_n$ soit positive et monotone.*
  - *Lorsqu'elle décroît, f_1 peut être choisie comme fonction dominante ;*
  - *Lorsqu'elle croît, la limite f peut être choisie comme fonction dominante.*

Exemple. Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \,\mathrm{d}x$.

Exemple. Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Remarque. *On peut connaître la valeur* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$

Exemple. Mettre en évidence l'importance de l'hypothèse de domination en considérant la suite de fonctions définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ n(2-nx) & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{2}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

6 Dérivation

6.1 Limite uniforme d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème de dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I.
Si :

- pour tout n, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
- $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers f,
- la suite des fonctions dérivées $(f_n')_n$ converge uniformément sur I vers une fonction g,

alors :

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
- $f' = g$.

Remarque.

- *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)\right)$$

  qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites et dérivées envisagées.
- *La convergence uniforme de $(f_n)_n$ n'entraîne pas la dérivabilité de la limite.*
- *Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I de $(f_n')_n$ par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de I, ou d'autres intervalles adaptés à la situation.*

Exemple. Étudier la convergence et la dérivabilité de la limite de la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

6.2 Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Théorème.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définie sur I, et $k \in \mathbb{N}^*$.
Si :

- pour tout n, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,
- pour tout $0 \leqslant j \leqslant k-1$, $(f_n^{(j)})_n$ converge simplement sur I vers une fonction g_j,
- la suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur I vers une fonction g_k,

alors :

- la limite simple g_0 de $(f_n)_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I
- pour tout $1 \leqslant j \leqslant k$, $g_0^{(j)} = g_j$.

Remarque.

- *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f_n(x)\right)$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites et dérivées envisagées.

- *Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I des $(f_n^{(k)})_n$ par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de I, ou d'autres intervalles adaptés à la situation.*

7 Exercices et résultats classiques à connaître

7.1 Étude de convergence uniforme

205.1

On pose : $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}\,x)$.

(a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$.

(b) La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?

(c) Pour $a > 0$, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$?

(d) La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

7.2 Utiliser le non transfert de continuité pour montrer la non convergence uniforme

205.2

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose :

$$f_n(x) = x^n$$

(a) Représenter quelques fonctions f_n.

(b) Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_n$ sur $[0,1]$.

7.3 Interversion limite-intégrale par convergence uniforme sur un segment

205.3

On pose : $f_n(x) = (x^2+1)\dfrac{n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}$.

(a) Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

(b) Déterminer la limite, pour $n \to +\infty$, de :

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

7.4 Convergence dominée avec domination par cas

205.4

Déterminer la limite de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin nt}{nt+t^2}\,\mathrm{d}t$$

7.5 Se ramener au théorème de convergence dominée

205.5

Calculer la limite pour $n \to +\infty$ de

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{\sqrt{n}u}\,\mathrm{d}u$$

205.6

Déterminer un équivalent de :

$$\int_0^n \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x$$

Exercices de mathématiques

Étude de convergence

205.7

Soit $\alpha > 0$ et la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$f_n(x) = xn^\alpha \mathrm{e}^{-nx}$$

(a) Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

(b) Pour quelles valeurs de α la convergence est-elle uniforme ?

205.8

Étudier les convergences simple, uniforme pour la suite de fonctions :

(a) $$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{n+1}{n^2+x^2} \end{array}$$

(b) $$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{nx^2}{1+nx} \end{array}$$

(c) $$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{x^2+n^2} \end{array}$$

205.9

Étudier les convergences simple, uniforme, uniforme sur tout segment pour la suite de fonctions :

(a) $$f_n : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} n|x| - n + 1 & \text{si } |x| > 1 - \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

(b) $$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{nx} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

(c) $$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n(1-x)\left(\sin \dfrac{\pi x}{2}\right)^n \end{array}$$

Suites définies par récurrence

205.10

Soit $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction positive et bornée. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par :

$$\forall n,\ \forall x,\ f_{n+1}(x) = \ln(1 + f_n(x))$$

Suites d'intégrales

205.11

Calculer la limite de la suite $(u_n)_n$ où $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + \mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

205.12

Prouver l'existence et déterminer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin(x/n)}}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\mathrm{d}x$

205.13

On pose :

$$u_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$$

Étudier la nature de la série de terme général u_n.

205.14

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{nx + x^2}$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est prolongeable par continuité en 0.

Dans la suite, on considère les f_n ainsi prolongées en 0.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

(c) On note $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

205.15

On pose $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+n^2x^2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

(a) Étudier la convergence simple sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions (f_n), puis la convergence uniforme sur $[0, 1]$.

(b) Trouver la limite de la suite (u_n).

Étude théorique

205.16

Établir que la limite simple d'une suite de fonctions de I vers $\mathbb{R}$ convexes est convexe.

205.17

Soit f continue sur $\mathbb{R}$, étudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_n$ où :

$$f_n \ : \ x \mapsto \sqrt{f(x)^2 + \frac{1}{n}}$$

Petits problèmes d'entrainement

✍ **205.18**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^n}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

(a) Montrer que, pour tout n, I_n existe.

(b) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

✍ **205.19**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

(a) Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $f \ : \ x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

(b) À l'aide de la suite $(f_n)_n$, calculer l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

205.20

Étudier les convergences simple, uniforme, uniforme sur tout segment pour la suite de fonctions :

(a) $\begin{array}{rccl} f_n : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin\left(\dfrac{n+1}{n}x\right) \end{array}$

(b) $\begin{array}{rccl} f_n : & [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln\left(1+\dfrac{nx^2}{1+nx}\right) \end{array}$

(c) $\begin{array}{rccl} f_n : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (nx)^{\frac{x}{n}} \end{array}$

205.21

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f_n(x) = (1-x)^n \sin\left(\dfrac{2\pi}{x}\right)$.

(a) Étudier la convergence simple de (f_n).

(b) Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $]0,2]$.

(c) Pour tout $a \in]0,1[$, montrer que (f_n) converge uniformément sur $[a, 2-a]$.

(d) Montrer que (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[1,2]$.

(e) En déduire que (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[a,2]$ pour tout a de $]0,1[$.

205.22

Soit $(f_n)_n$ la suite de fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_0(x) = x \text{ et } f_{n+1}(x) = \frac{x}{2+f_n(x)} \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

205.23

On définit $(u_n)_n$ suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$u_0(x) = 1 \text{ et } u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$:

$$0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

(b) En déduire, pour tout $x \in [0,1]$, la convergence de la suite $(u_n(x))_n$.

(c) Établir que la suite $(u_n)_n$ converge uniformément vers une fonction u non nulle, vérifiant :

$$u'(x) = u(x-x^2)$$

205.24

On considère $(f_n)_n$ suite de fonctions continues : $[a,b] \to \mathbb{R}$, qui converge simplement vers la fonction nulle. On suppose que, pour tout $x \in [a,b]$, la suite réelle $(f_n(x))_n$ est décroissante.
On souhaite montrer que la convergence est uniforme.

(a) Justifier que $(\|f_n\|_\infty)_n$ converge.

(b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $\|f_n\|_\infty = f_n(x_n)$.

On admet le théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

(c) En observant que, pour tout $p \leqslant n$, $f_n(x_n) \leqslant f_p(x_n)$, montrer que $\|f_n\|_\infty \to 0$ et conclure.

205.25

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout t de $[0,1]$, posons $g(t) = \mathrm{e}^t \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$.

Soit $t \in [0,1]$. Montrer que $|g'(t)| \leqslant \dfrac{1}{n}\mathrm{e}^t$, puis

$$\left| \mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right| \leqslant \frac{t}{n}$$

(b) Étudier la convergence uniforme de la suite d'applications (I_n) où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n(x) = \int_0^1 t^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

205.26

Soit $f\ :\ [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, intégrable sur $[0, +\infty[$, à dérivée intégrable sur $[0, +\infty[$.

(a) Pour $x > 0$, déterminer la limite de :

$$u_n(x) = \int_0^{+\infty} n \cos t \sin^n t f(xt)\,\mathrm{d}t$$

(b) Préciser le mode de convergence.

205.27

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)^{2n^4}$$

et on considère g une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors d'un segment $[a, b]$.
Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) g(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n \to +\infty]{} g(0)$$

205.28

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Soit $(x_n)_n$ une suite de réels qui converge vers ℓ. Est-ce que $(f_n(x_n))_n$ converge vers $f(\ell)$?

205.29

Existe-t-il une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction exp ?

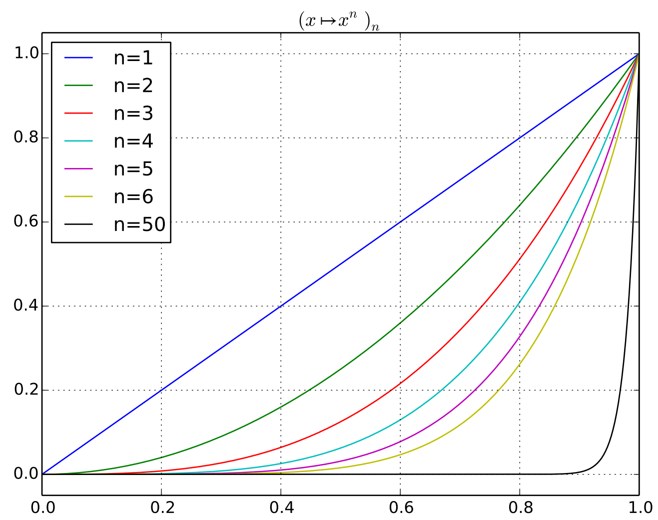
```python
#! /usr/local/bin/python3
# -*- coding:utf-8 -*-

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

plt.figure(1)
def u(n,x):
    return (x**n)

for n in [1,2,3,4,5,6,50]:
    x = np.linspace(0,1,n*100)
    y = [u(n,t) for t in x]
    plt.plot(x,y,label='n={}'.format(n))

plt.legend(loc='best')
plt.title(r"$(x \mapsto x^n)_n$")
plt.ylim(-0.05,1.05)
plt.grid()
plt.savefig('./205_illustration_1er_exemple.pdf')
```

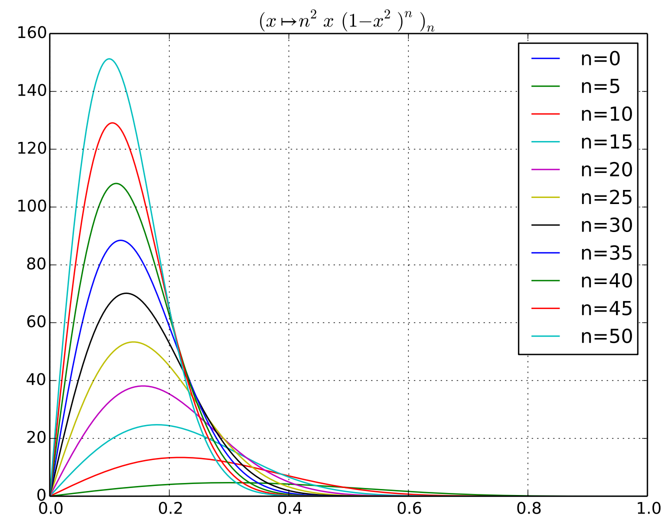



```python
#
```

```python
plt.figure(2)
def u(n,x):
    return n**2 * x * (1 - x**2) ** n

for n in range(0,51,5):
    x = np.linspace(0,1,n*100)
    y = [u(n,t) for t in x]
    plt.plot(x,y,label='n={}'.format(n))

plt.legend(loc='best')
plt.title(r"$(x \mapsto n^2 x\,(1-x^2)^n)_n$")
plt.grid()
plt.savefig('./205_illustration_2eme_exemple.pdf')
```

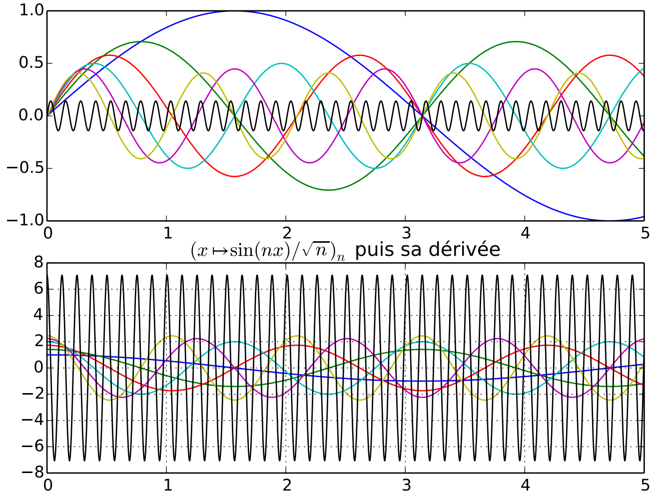



```python
#
```

```
plt.figure(3)
def u(n,x):
    return np.sin(n*x)/np.sqrt(n)
def du(n,x):
    return n*np.cos(n*x)/np.sqrt(n)

for n in [1,2,3,4,5,6,50]:
    x = np.linspace(0,5,n*100)
    y = [u(n,t) for t in x]
    dy = [du(n,t) for t in x]
    plt.subplot(211)
    plt.plot(x,y,label='n={}'.format(n))
    plt.subplot(212)
    plt.plot(x,dy,label='n={}'.format(n))

# plt.legend(loc='best')
plt.title(r"$(x \mapsto \sin(nx)/\sqrt{n})_n$ puis sa dérivée")
plt.grid()
plt.savefig('./205_illustration_3eme_exemple.pdf')
```

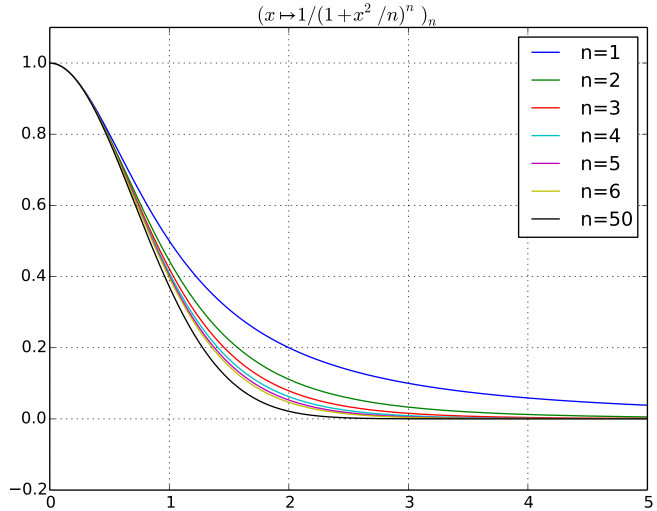



```
#
```

```
plt.figure(4)
def u(n,x):
    return 1/(1+x*x/n)**n

for n in [1,2,3,4,5,6,50]:
    x = np.linspace(0,5,n*100)
    y = [u(n,t) for t in x]
    plt.plot(x,y,label='n={}'.format(n))

plt.legend(loc='best')
plt.title(r"$(x \mapsto 1/(1+x^2/n)^n)_n$")
plt.ylim(-.2,1.1)
plt.grid()
plt.savefig('./205_illustration_4eme_exemple.pdf')
```




```
#
```