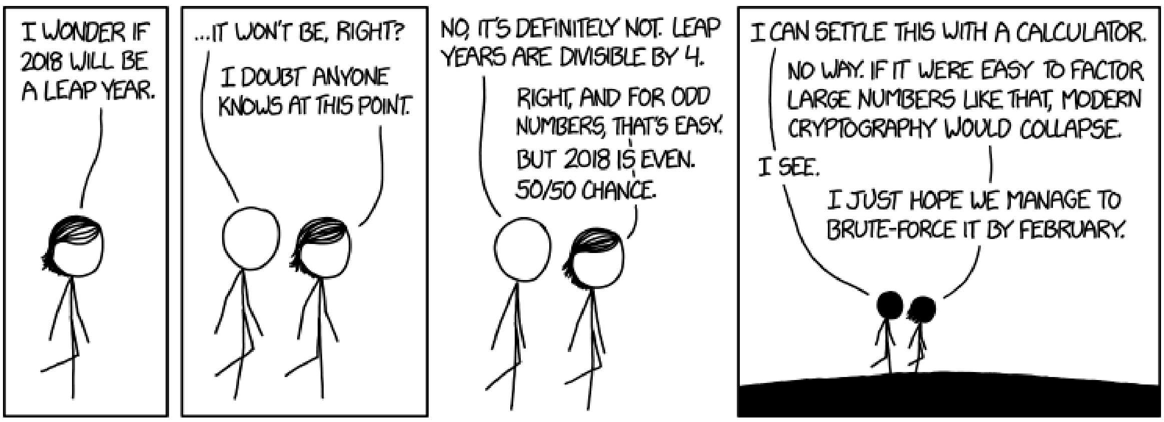
Séries de fonctions

Cours

Exercices

Pour bien démarrer

1. Qu'est-ce qu'une série numérique ? Quel est le lien entre suite et série ?
2. Quelles sont les principales techniques d'étude d'une série numérique à termes positifs ? alternées ? de signe quelconque ?
3. Qu'est-ce que la convergence simple d'une suite de fonctions ? la convergence uniforme ?
4. Comment assurer la continuité de la limite simple d'une suite de fonctions ? et la dérivabilité ?
5. Quel(s) théorème(s) permet(tent) d'intervertir limites et intégrales ?



https://xkcd.com/1935

Lu dans le programme officiel

La démonstration du théorème de la double limite est hors programme.
Les étudiants peuvent appliquer directement le théorème concluant au caractère $\mathcal{C}^k$ de la somme sous l'hypothèse de convergence simple des $\sum f_n^{(j)}$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme de $\sum f_n^{(k)}$ sur tout segment de I.
La démonstration du théorème d'intégration terme à terme est hors programme. L'hypothèse de continuité par morceaux de la somme, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I |f_n|$.

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1 Modes de convergence d'une série de fonctions

Dans ce chapitre, on considère des applications $f_n : I \to \mathbb{R}$ et on étudie la série de fonctions $\sum f_n$.

1.1 Convergence simple

Définition. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions $I \to \mathbb{K}$. On dit que $\sum f_n$ **converge simplement** si et seulement si, pour tout $x \in I$ fixé, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge.
Dans ce cas, on définit :

$$S : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{array}$$

appelée **somme** de la série de fonctions $\sum f_n$.

Remarque.

- *La convergence simple est la convergence point à point. On rédige toujours l'étude de la convergence simple en travaillant « à x fixé ».*
- *Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut noter :*

$$S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

  Alors $(S_n)_n$ la suite de fonctions des sommes partielles de $\sum f_n$, et la convergence simple de $\sum f_n$ est équivalente à la convergence simple de $(S_n)_n$.
- *En cas de convergence simple sur I, on note :*

$$R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = S(x) - S_n(x)$$

  Alors la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge simplement vers la fonction constante nulle sur I.
- *On peut rencontrer des séries de fonctions qui sont indexées par $n \geqslant n_0$.*

Il arrive que la convergence simple n'ait pas lieu sur I tout entier, mais sur une partie J de I. Dans ce cas, la somme de la série de fonction n'est définie que sur J, appelé **domaine de convergence simple** :

Proposition. La somme d'une série de fonction est définie là où la série de fonction converge simplement.

Remarque. *L'étude de la convergence, à x fixé, de $\sum f_n(x)$, se fait en utilisant les outils du chapitre 203 : on travaille en général sur le terme général $f_n(x)$, que l'on essaye de comparer au terme général d'unes série numérique connue (Riemann, géométrique, etc.). Dans ce cas, x joue le rôle d'un paramètre sur lequel on peut être amené à discuter.*

Exemple. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ dans le cas où :

1. $f_n(x) = x^n$
2. $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$
3. $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx^2}}{n}$
4. $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{\mathrm{e}^{-nx^2}}{n}$
5. $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx^2}}{n^2}$
6. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^{2n}}$

1.2 Convergence uniforme

Définition. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions : $I \to \mathbb{K}$. On dit que $\sum f_n$ **converge uniformément sur** I si et seulement si la suite de fonctions $(S_n)_n$ de ses sommes partielles converge uniformément sur I.

Remarque. *On peut quantifier la définition par :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \ t.q. \ \forall n \geqslant N, \ \forall x \in I, \ \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leqslant \varepsilon$$

Proposition. La convergence uniforme d'une série de fonctions implique sa convergence simple.

Théorème.

> $\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si :
>
> $$\begin{cases} \sum f_n \text{ converge simplement sur } I \\ (R_n)_n \text{ converge uniformément sur } I \text{ vers } 0 \end{cases}$$

Exemple. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur l'intervalle précisé.

1. $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^n}{n}$, $I = [0, 1]$.
2. $f_n(x) = x\mathrm{e}^{-nx^2}$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n + x^2}$, $I = \mathbb{R}$.

Proposition. Si $\sum f_n$ et $\sum g_n$ convergent uniformément sur I, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\sum(\lambda f_n + \mu g_n)$ converge uniformément sur I.

Proposition. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers $\widetilde{0}$ sur I.

Remarque. *Il est difficile de démontrer la convergence uniforme sans calculer explicitement la somme $S(x)$, sauf à avoir recours dans certains cas au TSSA.*

1.3 Convergence normale

On introduit dans ce chapitre un autre mode de convergence des séries de fonctions, plus « fort » que les précédents.

Définition. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions : $I \to \mathbb{K}$. On dit que $\sum f_n$ **converge normalement sur** I si et seulement si :

$$\begin{cases} f_n \text{ est bornée sur } I \text{ pour tout } n \\ \sum \|f_n\|_\infty \text{ converge} \end{cases}$$

Remarque.

- *On peut donner une définition moins forte, en ne travaillant que pour $n \geqslant n_0$.*
- *Le premier point permet de garantir l'existence de $\|f_n\|_\infty = \mathrm{Sup}\{|f_n(x)|, \ x \in I\}$*
- *Le second point est la convergence d'une série* ***numérique****.*
- *La convergence normale de $\sum f_n$, c'est la convergence de $\sum \|f_n\|_\infty$.*

Théorème.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions : $I \to \mathbb{K}$.
S'il existe une série numérique $\sum \alpha_n$ convergente et majorante, c'est-à-dire telle que :

$$\forall n, \forall x,\ |f_n(x)| \leqslant \alpha_n$$

où α_n est positive, indépendante de x et t.g. d'une série convergente,
alors $\sum f_n$ converge normalement.

Exemple. Étudier la convergence normale sur tout segment de $\sum \frac{x^n}{n!}$.

Exemple. Étudier la convergence normale sur $[0,1]$ de $\sum f_n$ où $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n}$.

1.4 Lien entre les différents modes de convergence

Proposition. La convergence uniforme implique la convergence simple.

Proposition. La convergence normale implique la convergence uniforme.

2 Régularité de la somme d'une série de fonctions

2.1 Transfert de continuité

Théorème.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I.
Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur I (on note S sa somme),
- pour tout n, f_n est continue sur I,

alors :

- S est continue sur I.

Raisonnement classique. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment $[a,b] \subset I$, et si les f_n sont continues sur I, alors S est continue sur tout $[a,b] \subset I$ donc sur I.

Remarque. *Ce résultat, qui exploite le caractère local de la continuité, s'adapte aussi lorsque la convergence uniforme est vérifiée sur une famille d'intervalles adaptés à la situation.*

Exemple. On note $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Montrer que exp est continue sur $\mathbb{R}$.

2.2 Théorème de la double limite

Théorème de la double limite.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I et a une extrémité de I (éventuellement infinie).
Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur I (on note S sa somme),
- pour tout n, f_n admet une limite finie ℓ_n en a,

alors :

- la série $\sum \ell_n$ converge (on note ℓ sa somme),
- la fonction S admet une limite en a,
- cette limite est égale à ℓ.

Preuve. La démonstration est hors programme. □

Remarque. *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$$

mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries et d'existence des limites envisagées.

Exemple. Pour $x > 0$, on note $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Déterminer la limite pour $x \to +\infty$ de $f(x)$.

Exemple. On s'intéresse à la série $\sum x^n$, qui converge simplement sur $]-1,1[$. Utiliser le théorème de la double limite pour montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $]-1,1[$.

2.3 Somme d'une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I.
Si :

- $\sum f_n$ converge simplement sur I (on note S sa somme),
- pour tout n, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
- la série des dérivées $\sum f_n'$ converge uniformément sur I,

alors :

- S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
- pour tout x : $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$.

Remarque.

- *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x}(x)$$

  qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries et d'existence des dérivées envisagées.
- *La convergence uniforme de $\sum f_n$ n'entraîne pas la dérivabilité de la somme.*
- *Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I de $\sum f_n'$ par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de I, ou d'autres intervalles adaptés à la situation.*

Exemple. Étudier la dérivabilité de la somme de la série $\sum \frac{1}{x^2 - n^2}$.

Exemple. Montrer que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx^2}}{n^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2.4 Extension aux fonctions de classes $\mathcal{C}^k$

Théorème.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définie sur I, et $k \in \mathbb{N}^*$.
Si :

- pour tout n, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,
- pour tout $0 \leqslant j \leqslant k-1$, $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I,
- la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I,

alors :

- la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I
- pour tout $1 \leqslant j \leqslant k$, $S^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$.

Remarque.

- *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)$$

  Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites et dérivées envisagées.
- *Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur I des $\sum f_n^{(k)}$ par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de I, ou d'autres intervalles adaptés à la situation.*

Exemple. Montrer que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

3 Intégration et séries de fonctions

3.1 Intégration terme à terme sur un segment

Théorème d'intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme.

Soit $a < b$, et $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un segment $[a, b]$.
Si :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ (on note S sa somme),
- $[a, b]$ est un segment,
- les f_n sont continues,

alors :

- la série $\sum \left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \right)$ converge,
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque. *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries envisagées.

Exemple. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_0^x t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x$.

3.2 Interversion $\sum / \int$ sur un intervalle quelconque

Théorème d'interversion $\sum / \int$ sur un intervalle quelconque.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I.
Si :

- $\sum f_n$ converge simplement sur I (on note S sa somme),
- les f_n et S sont continues par morceaux sur I
- les f_n sont intégrables sur I,
- la série numérique $\sum \left(\int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t \right)$ converge,

alors :

- la fonction S est intégrable sur I,
- $\displaystyle\int_I S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$

Preuve. La démonstration est hors programme. □

Remarque.

- *On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

  Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries et des intégrales envisagées.

- *L'intégrabilité des f_n sert à justifier l'existence des $\int_I f_n$.*
- *L'hypothèse importante de ce théorème est la convergence de la série $\sum \int |f_n|$.*
- *Dans certains ouvrages, ce théorème s'appelle « théorème de la convergence $\mathcal{L}^1$ ».*

Exemple. Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

3.3 Utilisation de la convergence dominée

Remarque. *Lorsque le théorème du paragraphe précédent ne s'applique pas (lorsque $\sum \int_I |f_n|$ ne converge pas), on peut chercher à appliquer le théorème de convergence dominée vu dans le chapitre 205 à la suite de fonctions $(S_n)_n$ des sommes partielles, ou à celle $(R_n)_n$ des restes, de la série de fonctions $\sum f_n$.*

Exemple. Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

4 Exercices et résultats classiques à connaître

4.1 La fonction ζ de Riemann

206.1

On définit, lorsque c'est possible : $\displaystyle\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

Montrer que ζ est une application définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

4.2 Utiliser l'interversion série/intégrale

206.2

Utiliser le théorème d'interversion série/intégrale pour exprimer comme somme d'une série l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

4.3 Utiliser la convergence dominée

206.3

Utiliser le théorème de convergence dominée pour exprimer comme somme d'une série l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

4.4 Faire apparaître une équation différentielle

206.4

(a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n+1}$$

(b) Montrer que f est continue sur $[0, \infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

(c) Déterminer une équation différentielle simple dont f est solution et en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

4.5 Étudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition

206.5

Montrer que $f \,:\, x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)}$ est définie sur $]-1, +\infty[$.
Étudier les limites de f en $+\infty$ et en -1.

4.6 Étudier la dérivabilité au bord de l'ensemble de définition

206.6

Pour $x \in [-1, 1]$, on pose :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Est-ce que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$?

Exercices de mathématiques

Étude de convergence

206.7

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions
$$f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2} \text{ avec } n \geqslant 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

206.8

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions
$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2} \text{ avec } n \geqslant 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

206.9

Étudier les convergences simple, normale, uniforme pour les séries de fonctions :

(a) $f_n : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \end{array}$

(b) $f_n : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-x}\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) \end{array}$

206.10

Étudier les convergences simple, normale, uniforme pour les séries de fonctions :

(a) $f_n : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{n+x}{n^3+x^2} \end{array}$

(b) $f_n : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{(-1)^n}{x^2+n^2} \end{array}$

(c) $f_n : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{(-1)^n}{x^2+n} \end{array}$

206.11

Étudier les convergences simple, normale, uniforme pour les séries de fonctions :

(a) $f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sin(nx)}{n^2+x^2} \end{array}$

(b) $f_n : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n^2x^n(1-x)^n \end{array}$

(c) $f_n : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{nx^2}{n^3+x^2} \end{array}$

Continuité et limite

206.12

Montrer que $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{e^{-2nx}+e^{3nx}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

206.13

On note $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f, puis la continuité de f sur ce domaine.

(b) Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et déterminer cette limite.

(c) Déterminer un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 0$.

Dérivation

206.14

Pour $x \in \mathbb{R}$ et sous réserve de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine définition.

(c) Donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

206.15

On considère la série de fonctions de t.g. u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

(a) Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.

(b) Calculer $S'(1)$.

Indication : penser à décomposer une fraction rationnelle en éléments simples.

Intégration

206.16

(a) Étudier $\sum u_n$ où $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x+\cdots+x^n}\,\mathrm{d}x$.

(b) Étudier $\sum v_n$ où $v_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+\cdots+x^n}\,\mathrm{d}x$.

206.17

Prouver la relation $\int_0^1 \ln t \ln(1-t)\mathrm{d}t = 2 - \frac{\pi^2}{6}$.

On admettra que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ *et que, pour* $t \in [0,1[$ *:*

$$\ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$$

Petits problèmes d'entrainement

✍ **206.18**

On pose :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} x^{n+1}}{n(n+1)}$$

(a) Déterminer le domaine de définition de S.

(b) Montrer que S est continue sur $[0,+\infty[$.

(c) Établir :

$$\forall x > 0,\ S(x) + S\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

(d) Dresser le tableau des variations de S sur $[0,+\infty[$, et tracer sa courbe représentative sur ce même intervalle.

✍ **206.19**

On définit, pour $x \in \mathbb{R}$, $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

(a) Déterminer le domaine de définition de ζ.

(b) Montrer que ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et exprimer $\zeta^{(k)}(x)$ sous la forme de somme d'une série.

(c) Étudier les variations de ζ.

(d) Montrer que $\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ et $\zeta(x) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^x}$.

(e) Montrer, pour $x > 1$:

$$\frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}$$

En déduire le comportement de $\zeta(x)$ pour $x \overset{>}{\to} 1$.

(f) Dresser le tableau des variations de ζ et tracer sa courbe représentative.

206.20

Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ (quand cela a un sens).
Montrer que $S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
En utilisant la décroissance, à $x > 0$ fixé, de $g\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{t^2+x^2}$, montrer que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2x}$.

206.21

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\dfrac{x^n}{1+x^n}$.

Sous réserve de convergence, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

(a) Déterminer le domaine définition de f.

(b) Montrer que pour tout x non nul de D_f :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} - f\left(\frac{1}{x}\right)$$

(c) Pour tout $a \in [0,1[$, montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[-a,a]$. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

(d) Montrer que f est continue en 1.

206.22

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n\ :\ \begin{array}{ccl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\ln(n+x)}{n^2} \end{array}$$

(a) Étudier la convergence simple de $\sum f_n$. On note S la somme.

(b) Monter que S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[$ et exprimer $S'(x)$ et $S''(x)$ sous la forme de sommes de séries.

(c) En déduire que S est strictement croissante et concave sur $[0,+\infty[$.

(d) Montrer, d'une façon plus simple, que S est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

206.23

Soit $(a_n)_n$ une suite réelle positive et décroissante. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a_n x^n(1-x) \end{array}$$

(a) Monter que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

(b) Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$ si et seulement si $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.

(c) Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ si et seulement si $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

206.24

Soit n un entier naturel non nul.

(a) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ est définie.

(b) Soit $a \geqslant 0$. Calculer : $\displaystyle\int_0^{a} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$. En déduire la valeur de : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ puis de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

(c) Soit $a \geqslant 0$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_n \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$ converge uniformément sur $[0,a]$, puis que :

$$\int_0^a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$$

(d) En exploitant une comparaison série-intégrale, déterminer la limite lorsque $a \to +\infty$ de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$.

(e) En déduire que l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente et donner sa valeur.

(f) Qu'en conclure ?

206.25

On note, sous réserve d'existence :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{1+nx}}$$

(a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$ et que

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(1+\sqrt{n+1})}$$

(c) f est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$?