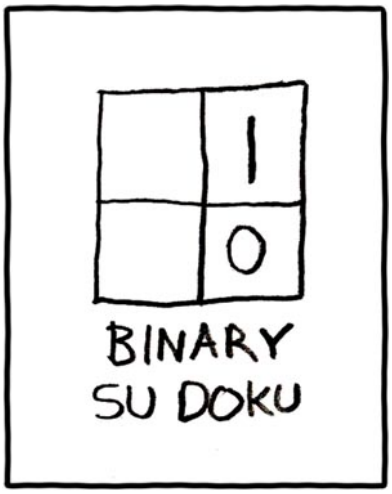
Topologie d'un espace vectoriel normé

Pour bien démarrer

1. Qu'est-ce qu'une norme ?
2. Que signifie que deux normes sont équivalentes ?
3. Qu'est-ce que la caractérisation séquentielle de la continuité ?



https://xkcd.com/74

Lu dans le programme officiel

> Toute autre propriété de l'adhérence autre que la caractérisation séquentielle est hors programme.
> Intérieur, frontière ne sont pas mentionnés dans le programme.
> La démonstration du théorème des bornes atteintes est hors programme.

Dans tout le chapitre, sauf mention contraire :
E et F désignent des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$.
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Approche séquentielle

1.1 Fermé, point adhérent

Définition. Une partie A de E est **un fermé** si et seulement si pour toute suite convergente d'éléments de A, la limite appartient à A.

Remarque. *Cela signifie que A contient les limites de toutes les suites convergentes d'éléments de A. On peut quantifier cela en :*

$$A \text{ fermé} \iff \left(\forall\,(u_n)_n \in A^{\mathbb{N}},\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \implies \ell \in A\right)$$

Exemple. Justifier que $[0,1]$ est un fermé de $\mathbb{R}$ et que $[0,1[$ n'est pas un fermé.

Exemple. Justifier que $[0,+\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Remarque. *Cette définition est inchangée par passage à une norme équivalente. En particulier, elle est indépendante du choix de la norme lorsque E est de dimension finie.*

Définition. On dit que $a \in E$ est **adhérent** à A si et seulement si a est limite d'une suite d'éléments de A.

On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A, que l'on appelle l'**adhérence** de A.

Remarque. *On peut quantifier $a \in \overline{A}$ en :*

$$\exists (u_n)_n \in A^{\mathbb{N}},\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$$

Proposition.

- Tout $x \in A$ est adhérent à A : $A \subset \overline{A}$.
- A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.

Exemple. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Alors $\operatorname{Inf} A$ et $\operatorname{Sup} A$ sont adhérent à A.

1.2 Partie dense

Définition. Une partie A de E est dite **dense** si et seulement si $\overline{A} = E$.

Remarque. *Cela signifie que tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A.*

Exemple. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

1.3 Propriétés

Proposition.

- L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.
- La réunion d'une famille finie de fermés est un fermé.

Exemple. Donner un exemple de réunion infinie de fermés qui n'est pas un fermé.

Théorème.

Soit $f : E \to F$ une fonction continue.
Si B est un fermé de F, alors $f^{-1}(B)$ est un fermé de E.

Exemple. Justifier que l'ensemble des matrices non inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Exemple. Dans E e.v.n., avec $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, justifier que $D = \{x \in E,\ \|x - a\| \leqslant r\}$ est un fermé.
Corollaire. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors $\{x \in E,\ f(x) = 0\}$ et $\{x \in E,\ f(x) \geqslant 0\}$ sont des fermés de E.
Remarque. *On retient que les parties de E définies par une équation ou une inéquation (large, continue) sont des fermés de E.*
Exemple. Justifier que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x^2 + y^2)^2 + x^2 + 3y^2 \leqslant 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
Exemple. Justifier qu'un hyperplan d'un espace vectoriel normé de dimension finie est un fermé.
Théorème des bornes atteintes.

Soit $f : A \subset E \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Si E est de dimension finie, que A est une partie non vide, fermée et bornée de E, alors f est bornée et atteint ses bornes sur A.

Preuve. La démonstration, hors programme, est proposée en complément au § 4.1. □

Remarque.

- *Il est important que f soit à valeurs réelles, sinon il n'est pas question de parler de son* Sup *et de son* Inf.
- *Le théorème indique que* $\underset{x \in A}{\mathrm{Sup}}(f(x))$ *existe, et que c'est un* Max.
- *Ce théorème est un moyen commode de justifier l'existence* ***a priori*** *d'un maximum, d'un minimum.*
- *Lorsque $E = \mathbb{R}$, on retrouve le théorème de première année : l'image d'un segment par une application continue est un segment.*
- *En dimension finie, une partie fermée et bornée est qualifiée de* ***compacte****, mais ce mot est hors programme en PSI.*

Exemple. On considère $f : (x, y) \mapsto \cos(x) + \sqrt{x^2 + y^2}$.
Montrer que f admet un maximum sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x^2 + y^2)^2 + x^2 + 3y^2 \leqslant 1\}$.

2 Vocabulaire topologique

2.1 Les boules

Définition. Soit $a \in E$ et $r > 0$.

- On appelle **boule ouverte de centre a et de rayon r** l'ensemble :
$$B(a, r) = \{x \in E,\ \|x - a\| < r\}$$
- On appelle **boule fermée de centre a et de rayon r** l'ensemble :
$$BF(a, r) = \{x \in E,\ \|x - a\| \leqslant r\}$$
- On appelle **sphère de centre a et de rayon r** l'ensemble :
$$S(a, r) = \{x \in E,\ \|x - a\| = r\}$$

Remarque.

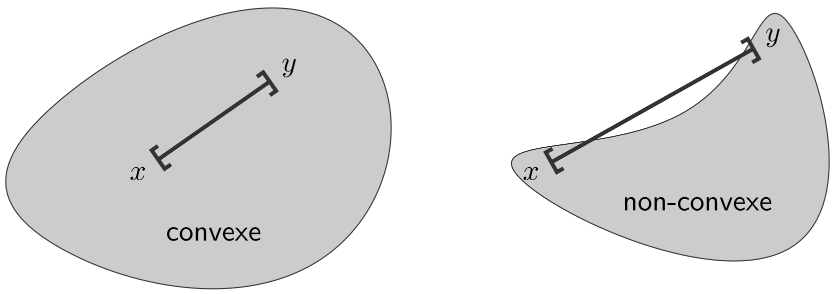
- *On peut étendre la définition au cas où $r = 0$, voire au cas où $r < 0$.*
- *Lorsque $r = 1$, on parle de boule ou de sphère* ***unité****.*
- *On comprend bien que $\|x - a\|$ est la distance entre a et x.*

Exemple. Pour la norme usuelle de $\mathbb{R}$, représenter la boule unité de centre $a = 0_{\mathbb{R}}$.
Exemple. Pour chacune des trois normes usuelles de $\mathbb{R}^2$, représenter la boule unité de centre $a = 0_{\mathbb{R}^2}$.

2.2 Parties convexes

Définition. Soit A une partie de E. On dit que A est **convexe** si et seulement si :

$$\forall x, y \in A,\ \forall t \in [0,1],\ tx + (1-t)y \in A$$



Remarque. $\{tx + (1-t)y,\ t \in [0,1]\}$ *est le segment $[x, y]$.*
Exemple. Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
Proposition. L'intersection d'une famille quelconque de convexes est convexe.
Proposition. Une boule, ouverte ou fermée, est convexe.

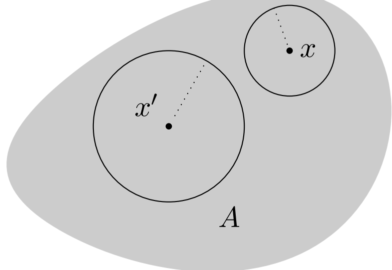
2.3 Ouvert, point intérieur

Définition. Une partie A de E est **un ouvert** si et seulement si son complémentaire $E \setminus A$ est un fermé.
Remarque.

- *Cette définition est inchangée par passage à une norme équivalente. En particulier, elle est indépendante du choix de la norme lorsque E est de dimension finie.*
- *Contrairement au langage courant, « ouvert » n'est pas le contraire de « fermé ». Une partie de E peut être à la fois ouverte et fermée, peut n'être ni ouverte, ni fermée.*

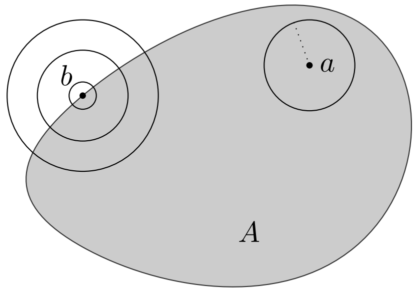
Proposition. A est un ouvert de E si et seulement si :

$$\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x, r) \subset A$$



Remarque. *Dans cette caractérisation, la valeur de r dépend de x.*
Définition. On dit que a est **intérieur à** A lorsque :

$$\exists r > 0,\ B(a, r) \subset A$$



Remarque. *L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle parfois l'**intérieur de** A, et est noté $\mathring{A}$.*
Exemple.

- $\varnothing$ et E sont toujours ouverts.
- $]0, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Exemple. Un sous-espace vectoriel d'un e.v.n. peut-il être ouvert ?

2.4 Propriétés

Proposition.

- Les boules ouvertes sont des ouverts de E.
- Les boules fermées, les sphères, sont des fermés de E.

Proposition.

- La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est un ouvert.
- L'intersection d'une famille finie d'ouverts est un ouvert.

Corollaire. Les intervalles ouverts sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
Exemple. Que penser de $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$?
Théorème.

> Soit $f : E \to F$ une fonction continue.
> Si B est un ouvert de F, alors $f^{-1}(B)$ est un ouvert de E.

Exemple. Montrer que $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Corollaire. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors $\{x \in E,\ f(x) > 0\}$ est un fermé de E.
Remarque. *On retient que les parties de E définies par une inéquation stricte (et continue) sont des ouverts de E.*
Exemple. Justifier que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy > 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

3 Exercices et résultats classiques à connaître

3.1 Dépendance au choix de la norme

207.1

On note $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ que l'on munit des deux normes en posant :

$$\|f\|_\infty = \underset{x\in[0,1]}{\mathrm{Sup}}\,(|f(x)|) \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

On considère $A = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$ et $g\ :\ x \mapsto 1$.

(a) Est-ce que g est adhérent à A pour la norme $\|\cdot\|_\infty$?

(b) Est-ce que g est adhérent à A pour la norme $\|\cdot\|_1$?

3.2 Un peu de topologie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

207.2

Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

207.3

Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

4 Compléments de cours

4.1 Complément : preuve du théorème des bornes atteintes

Résultat 1 De toute suite bornée de réelle on peut extraire un sous-suite convergente.

Preuve. Le principe de la preuve est celui de la dichotomie.
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite réelle bornée. Construisons par récurrence deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ adjacentes et telles que pour tout n, $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite (u_n).

- On note $a_0 = \text{Inf}_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $b_0 = \text{Sup}_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. On suppose a_n et b_n construits, tels que $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ soit croissante, $(b_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ soit décroissante, $b_n - a_n = \frac{b_0-a_0}{2^n}$ et $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_n$.
- L'un au moins des deux intervalles : $\left[a_n, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right]$ et $\left[\dfrac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_n$; on le note $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.

Les deux suites ainsi construites sont adjacentes, donc convergent vers une même limite notée ℓ.
Il suffit maintenant de formaliser la construction d'une extractrice φ telle que $(u_{\varphi(n)})_n$ converge vers ℓ à nouveau par récurrence :

- On pose $\varphi(0) = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. On suppose défini $\varphi(n)$ tel que $(\varphi(k))_{0\leqslant k\leqslant n}$ soit strictement croissante et $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$.
- $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient une infinité de u_p, l'un d'eux au moins a donc un indice $p > \varphi(n)$. On le note $\varphi(n+1)$.

On a construit ainsi une extractrice φ (strictement croissante) telle que, pour tout n, $a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$ donc $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ par encadrement. □

Résultat 2 De toute suite bornée de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension finie on peut extraire un sous-suite

Preuve. On suppose pour simplifier que l'on travaille avec une suite dans $\mathbb{R}^3$, mais le raisonnement se généralise à $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{C}^q$ qui est isomorphe à $\mathbb{R}^{2q}$ et aux autres espaces vectoriels de dimension finie.
On considère $(x_n)_n$ une suite bornée, et on note $(x_n^1)_n, (x_n^2)_n, (x_n^3)_n$ les suites coordonnées. En utilisant par exemple la norme $\|\cdot\|_\infty$, les suites coordonnées sont bornées.
Par le résultat précédent, on peut extraire de $(x_n^1)_n$ une suite $(x^1_{\varphi_1(n)})_n$ convergente.
On peut alors extraire de $(x^2_{\varphi_1(n)})_n$ une suite $(x^2_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)})_n$ convergente.
On extrait enfin de $(x^3_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)})_n$ une suite $(x^3_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\varphi_3(n)})_n$ convergente.
Alors, avec $\varphi = \varphi_1\circ\varphi_2\circ\varphi_3$, les trois suites $(x^1_{\varphi(n)})_n$, $(x^2_{\varphi(n)})_n$, $(x^3_{\varphi(n)})_n$ sont extraites de suites convergentes donc convergent, et par suite $(x_{\varphi(n)})_n$ converge. □

Résultat 3 Toute fonction f $E \to \mathbb{R}$ continue sur A fermé borné dans un espace vectoriel de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.

Preuve.

- Commençons par montrer par l'absurde que f est bornée.
  On suppose que f n'est pas bornée. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A$ tel que $\|f(x_n)\| > n$.
  La suite $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de A qui est une partie bornée, donc $(x_n)_n$ est bornée. Par le résultat 2 on peut en extraire une suite $(x_{\varphi(n)})_n$ convergente. On note ℓ sa limite.
  Comme A est fermé, $\ell \in A$ comme limite d'une suite d'éléments de A.
  Comme f est continue, $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$.
  On a alors $+\infty \xleftarrow[n\to+\infty]{} \varphi(n) < \|f(x_{\varphi(n)})\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|f(\ell)\|$ ce qui est absurde.

  On a montré que f est bornée, donc $\text{Sup}_{x\in A} f(x)$ et $\text{Inf}_{x\in A} f(x)$ existent. On veut maintenant montrer que f atteint ses bornes. On traite le cas du Sup, celui de l'Inf se traitant de façon analogue.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On applique la caractérisation de la borne Sup avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Il existe donc un élément $x_n \in A$ tel que
  $$\underset{A}{\text{Sup}}\, f - \frac{1}{n} \leqslant f(x_n) \leqslant \underset{A}{\text{Sup}}\, f$$
  On a donc construit une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A dont on peut extraire $(x_{\varphi(n)})_n$ convergente. On note ℓ sa limite.
  Comme f est continue en ℓ et $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, on a $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$.
  Mais comme $\text{Sup}_A f - \frac{1}{\varphi(n)} \leqslant f(x_{\varphi(n)}) \leqslant \text{Sup}_A f$ on a aussi $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \text{Sup}_A f$ par encadrement.
  Par unicité de la limite, $\text{Sup}_A f = f(\ell)$ ce qui justifie que le Sup est atteint.

□

Exercices de mathématiques

Topologie

207.4

(a) Montrer que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ y > x\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ y \leqslant x\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

207.5

Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

207.6

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$ et $F = \left\{f \in E,\ \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x > 0\right\}$.
Montrer que F est un ouvert de E.

207.7

On considère l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$.
On note $A = \mathbb{Z}$ et $B = \left\{n - \frac{1}{2n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

- Montrer que A et B sont fermés.
- Montrer que $A + B$ n'est pas fermé.

Convexite

207.8

Montrer que l'image directe (respectivement l'image réciproque) d'un convexe A par une application linéaire est un convexe.

207.9

Soit E un e.v.n. et C une partie convexe de E. Montrer que $\overline{C}$ est convexe.

207.10

Soit A une partie non vide d'un e.v.n. E de dimension finie. Pour $x \in E$, on note :

$$d(x, A) = \operatorname*{Inf}_{a \in A} \|x - a\|$$

Pour $R > 0$, on note :

$$A(R) = \{x \in E \text{ t.q. } d(x, A) \leqslant R\}$$

Montrer que, si A est convexe, alors $A(R)$ est convexe et fermé.

Petits problèmes d'entrainement

✍ **207.11**

(a) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(b) Est-ce que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

✍ **207.12**

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(a) Est-ce que $F = \{f \in E \text{ t.q. } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0\}$ est un fermé de E ?

(b) Est-ce que $U = \{f \in E \text{ t.q. } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0\}$ est un ouvert de E ?

207.13

On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\|P\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t\in[0,1]} |P(t)|$$

(a) On note $P_n = \dfrac{1}{2^n}X^n$. Déterminer la limite de la suite $(P_n)_n$.

(b) Justifier que l'application $\varphi\ :\ P \mapsto P(2)$ est linéaire, mais non continue sur $\mathbb{R}[X]$.

(c) Montrer que l'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(2) = 0\}$ est une partie dense de $\mathbb{R}[X]$.

207.14

Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $N_1,\ N_2$ deux normes sur E.
On désigne par B_1 (resp. B_2) la boule ouvert de centre O et rayon 1 pour N_1 (resp. N_2).
Montrer que si $B_1 = B_2$, alors $N_1 = N_2$.

207.15

Soit E un espace normé, $\|\cdot\|$ la norme et A une partie non vide de E.

(a) Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

(b) Montrer que $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

(c) Vérifier que les questions précédentes permettent de justifier que $\overline{A}$ est un fermé de E.

207.16

Soit E un espace normé, $\|\cdot\|$ la norme et F un fermé de E.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n = \displaystyle\bigcup_{x\in F} B\left(x, \frac{1}{n}\right)$.

(a) Montrer que, pour tout n, A_n est un ouvert contenant F.

(b) Montrer que $F = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$.

207.17

(a) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que le graphe de f est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

(b) Donner un exemple de fonction discontinue dont le graphe est fermé.

On admet pour la suite de l'exercice que, de toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

(c) Montrer que si f est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$ et que son graphe est fermé, alors f est continue.