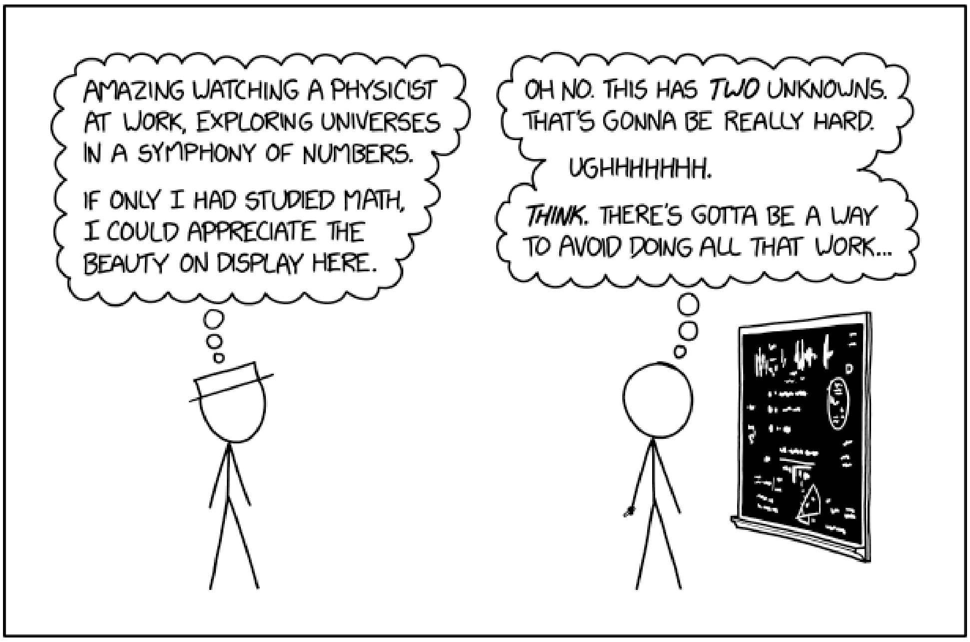
Séries entières

Pour bien démarrer

1. Qu'est-ce qu'une série de fonctions ? Différents modes de convergence ?
2. Lien entre suite convergente et suite bornée ?
3. Lien entre $\sum u_n$ convergente et (u_n) bornée ?
4. Qu'est-ce que la convergence absolue d'une série numérique ?
   Lien entre convergence absolue et convergence ?
5. Qu'est-ce qu'un produit de Cauchy ?
6. Que vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$? Pour quels x ?
7. Que vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$? Pour quels x ?
8. Que vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$? Pour quels x ?
9. Que vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n/2}}$?
10. Qu'est-ce que la règle de D'Alembert ?
11. Condition nécessaire (ou suffisante ?) pour que la somme S d'une série de fonctions soit continue sur I ?
    Idem pour dériver S ?
12. Formule de Taylor avec reste intégral ?
13. Développements limités en 0 des fonctions usuelles (exp, cos, sin, ch, sh, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, Arctan).



https://xkcd.com/2207

Lu dans le programme officiel

On admet la continuité de la somme d'une série entière d'une variable complexe sur le disque ouvert de convergence.
L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ou du disque de convergence n'est pas un objectif du programme.

1 Rayon de convergence

1.1 Définitions

Définition. On appelle **série entière** toute série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe a_n tel que $f_n : x \mapsto a_n x^n$.

Remarque. *Les a_n déterminent complètement la série entière.*
Lorsque $(a_n)_{n \geqslant n_0}$ n'est définie qu'à partir d'un certain rang, on convient que les premiers termes sont nuls, et on note $\sum_{n \geqslant n_0} a_n x^n$ la série entière associée.

Convention. Lorsque la variable est réelle, on la note x et $\sum a_n x^n$ est la **série entière de variable réelle** x.
Lorsque la variable est complexe, on la note z et $\sum a_n z^n$ est la **série entière de variable complexe** z.

1.2 Convergence d'une série entière

Lemme d'Abel.

> Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_n$ soit bornée.
> Alors, pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Remarque. *Ainsi, si $(a_n z_0^n)_n$ est bornée, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument sur le disque ouvert $D(O, |z_0|)$.*

Définition. On appelle **rayon de convergence** d'une série entière la quantité :

$$R = \mathrm{Sup}\,\{\rho \in \mathbb{R}_+ \text{ t.q. } (a_n \rho^n)_n \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Exemple. Donner un exemple de série entière dont le rayon de convergence est infini (resp. nul, resp. égal à 1).

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et R son rayon de convergence. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a :

- Si $|z| < R$, alors $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$, alors $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée et $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement.
- Si $|z| = R$, on ne peut rien dire concernant la convergence de $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$

Proposition.

- $R = 0$ si et ssi $\sum a_n z^n$ ne converge que pour $z = 0$.
- $R = +\infty$ si et ssi $\sum a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont le même rayon de convergence.

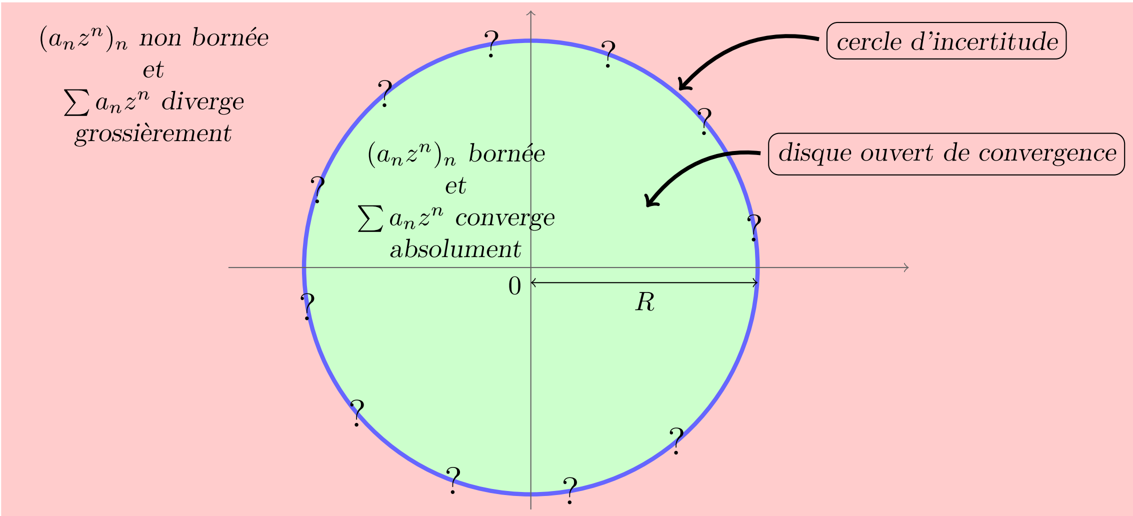
Définition. Pour une série entière complexe de rayon R, on appelle **disque ouvert de convergence** :

$$D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| < R\}$$

et on définit sur $D(0, R)$ la **somme** de la série entière : $S : \begin{array}{rcl} D(0,R) & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array}$

Le cercle $C(0, R)$ s'appelle le **cercle d'incertitude**.

Interprétation graphique dans le cas $\sum a_n z^n$.



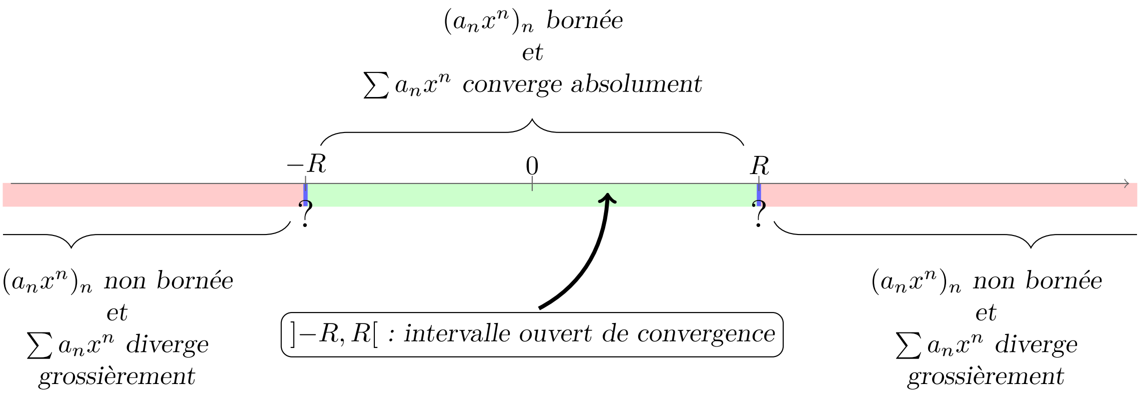
Définition. Pour une série entière réelle de rayon R, on appelle **intervalle ouvert de convergence** :

$$]-R, R[= \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } |x| < R\}$$

et on définit sur $]-R, R[$ la **somme** de la série entière :

$$S : \begin{array}{ccc}]-R, R[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$$

Interprétation graphique dans le cas $\sum a_n x^n$.



Exemple. Étudier la convergence en $z = 1$ et $z = -1$ des séries entières suivantes :

$$\sum z^n \qquad \sum \frac{z^n}{n} \qquad \sum \frac{z^n}{n^2}$$

Quels sont les rayons de convergence de ces trois séries entières ?

Remarque. *L'étude de la convergence sur le cercle d'incertitude n'est pas un objectif du programme. Précisons tout de même que, si on note D le domaine de convergence de $\sum a_n z^n$, on a :*

$$D(0, R) \subset D \subset \overline{D(0, R)}$$

1.3 Détermination pratique du rayon de convergence

1.3.1 Quelques situations fréquentes

La connaissance de la convergence pour certaines valeurs de z nous renseigne souvent suffisamment pour déduire la valeur de R. Précisons :

Proposition.

- Si pour un $z_0 \in \mathbb{C}$, $\sum a_n z_0^n$ est convergente, alors $z_0 \in \overline{D(0,R)}$ i.e. $R \geqslant |z_0|$.
- Si pour un $z_0 \in \mathbb{C}^*$, $\sum a_n z_0^n$ n'est pas absolument convergente, alors $z_0 \notin D(0,R)$ i.e. $R \leqslant |z_0|$.
- Si pour un $z_0 \in \mathbb{C}$, $\sum a_n z_0^n$ est semi-convergente, alors $z_0 \in C(0,R)$ i.e. $R = |z_0|$.

Remarque. *En pratique, on applique souvent la proposition précédente avec z_0 réel.*

Exemple. On note a_n le n-ième chiffre de l'écriture décimale de $\sqrt{2}$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Proposition.

- Si pour un $\rho > 0$, $(a_n \rho^n)_n$ est bornée, alors $R \geqslant \rho$.
- Si pour un $\rho > 0$, $(a_n \rho^n)_n$ n'est pas bornée, alors $R \leqslant \rho$

1.3.2 Comparaison asymptotique et rayon de convergence

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, R_a et R_b leurs rayons de convergence respectifs.

- Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si, à partir d'un certain rang, $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

Exemple. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{z^n}{n^2+n+1} \qquad\qquad \sum \ln(1+n) z^n$$

Remarque. *On aura, au § 4.3.4, un formulaire donnant le rayon de convergence des développements en série entière de référence.*

1.3.3 Rayon de $\sum n a_n z^n$

Proposition. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Remarque. *On en déduit que les séries $\sum n^2 a_n z^n$, $\sum \frac{a_n}{n} z^n$ etc. ont toutes le même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$.*
Voir aussi au § 3.4 le théorème de dérivation terme à terme des séries entières.

1.3.4 Utilisation de la règle de d'Alembert sur les séries numériques

Remarque. *On trouve dans certains ouvrages une « règle de d'Alembert pour les séries entières » qui est hors programme. C'est donc bien, à $z \neq 0$ fixé, que l'on applique la règle de d'Alembert pour les séries numériques.*

Remarque. *Cette méthode est commode lorsque a_n est une fraction rationnelle, ou une exponentielle, ou contient des factorielles. Elle est peu adaptée aux cas où a_n est défini par cas ou de façon un peu abstraite.*

Exemple. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{n!}{n^n} z^n \qquad \sum \frac{z^{2n}}{n^2+1} \qquad \sum \frac{2^n}{3^n+1} z^{3n} \qquad \sum \frac{n}{2^n} z^{3n}$$

Exemple. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \sin(n) z^n \qquad \sum a_n z^n \text{ où } \begin{cases} a_{2n} = 2^{2n} \\ a_{2n+1} = 1 \end{cases}$$

2 Opérations sur les séries entières

2.1 Loi externe

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Pour $\lambda \neq 0$, $\sum \lambda a_n z^n$ a pour rayon de convergence R et, pour tout z tel que $|z| < R$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

2.2 Somme de deux séries entières

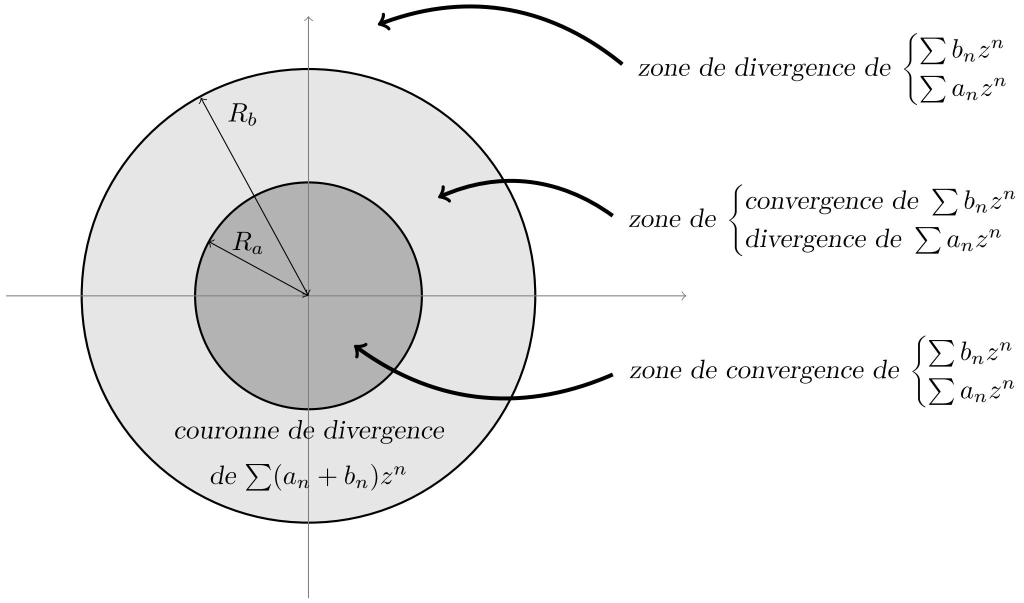
Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, R_a et R_b leurs rayons de convergence respectifs.

- Si $R_a < R_b$ alors $\sum (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R = R_a < R_b$
- Si $R_a = R_b$ alors le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geqslant R_a = R_b$

Dans tous les cas, pour $|z| < \mathrm{Min}(R_a, R_b)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Interprétation graphique lorsque $R_a < R_b$.



Exemple. Donner un exemple de deux séries entières pour lesquelles $R > R_a = R_b$

2.3 Produit de Cauchy

Définition. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. On définit leur **produit de Cauchy** comme étant la série entière $\sum c_n z^n$ où :

$$\forall n,\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

Remarque. *Cela correspond, à z fixé, au produit de Cauchy des séries numériques.*

Proposition. Soit R_a et R_b les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, et R_c le rayon de convergence de $\sum c_n z^n$ leur produit de Cauchy. Alors :

$$R_c \geqslant \mathrm{Min}(R_a, R_b)$$

et pour tout $|z| < \mathrm{Min}(R_a, R_b)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

Exemple. Effectuer le produit de Cauchy de $\sum z^n$ avec elle-même.

3 Régularité de la somme

3.1 Mode de convergence des séries entières réelles

On s'intéresse à une série entière de variable réelle $\sum a_n x^n$ et on note R son rayon de convergence.

Remarque. *On a déjà dit la convergence simple sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.*

Théorème.

$\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment $[-a, a] \subset\ ]-R, R[$.

Exemple. Déterminer les domaines de convergence simple, uniforme, normale pour :

$$\sum x^n,\ \sum \frac{x^n}{n},\ \sum \frac{x^n}{n^2}$$

Remarque. *Aucun résultat dans le cadre de notre programme au bord de l'intervalle de convergence. Néanmoins, on peut chercher à appliquer le théorème de la double limite en R (resp. en $-R$) en justifiant la convergence uniforme sur $[0, R]$ (resp. sur $[-R, 0]$).*

3.2 Continuité de la somme des séries entières

Théorème.

> Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
> Sa somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

Remarque. *L'étude de la continuité en $\pm R$ se fait au cas par cas, en utilisant les théorèmes du chapitre 206.*
On dispose plus généralement du résultat suivant :
Proposition. Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de variable complexe, de rayon de convergence R, alors sa somme est continue sur le disque ouvert de convergence.

Preuve. Résultat admis. □

3.3 Primitives/intégrales de la somme des séries entières réelles

Proposition. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Pour tout $[a, b] \subset]-R, R[$:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \int_a^b t^n \,\mathrm{d}t \right)$$

Corollaire. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Une primitive de sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R, R[$ est :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

qui est obtenue par primitivation terme à terme. Son rayon est R.

Exemple. Primitiver $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

3.4 Dérivabilité de la somme des séries entières réelles

Théorème.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Sa somme $S\ :\ x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.
De plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Corollaire. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Sa somme $S\ :\ x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.
De plus, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} S^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+k)(n+k-1)\dots(n+1) a_{n+k} x^n \end{aligned}$$

Exemple. On considère $f\ :\ x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, calculer $f'(x)$ et en déduire l'expression de $f(x)$.

Exemple. Montrer que $g\ :\ x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et S sa somme.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

Corollaire (Unicité des coefficients d'une série entière). Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b. On suppose que leurs sommes coïncident sur un intervalle ouvert non vide :

$$\exists \rho,\ 0 < \rho < \mathrm{Min}(R_a, R_b) \text{ t.q. } \forall t \in]-\rho, \rho[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$$

Alors les séries entières sont identiques :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$$

4 Développement en série entière en 0 d'une fonction d'une variable réelle

4.1 Développement en série entière d'une fonction

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0.

On dit que f **est développable en série entière sur** $]-r, r[$ ou **admet un développement en série entière** si et seulement si $]-r, r[\subset I$ et il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que :

$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Remarque. *Souvent, on ne précise pas la valeur de $r > 0$, on dit simplement que f est développable en série entière **au voisinage de** 0 ou **en** 0.*

Remarque. *La fonction f peut être définie sur un intervalle plus grand que $]-R, R[$ ou $[-R, R]$.*
En revanche, si f n'est pas continue en $x_0 \neq 0$, alors $R \leqslant |x_0|$.

Proposition. Si f admet un développement en série entière au voisinage de 0, alors il est unique.

Proposition. Soit f une fonction qui admet un développement en série entière $\sum a_n x^n$ au voisinage de 0.

- Si f est paire, son développement en série entière est pair : $\forall p,\ a_{2p+1} = 0$.
- Si f est impaire, son développement en série entière est impair : $\forall p,\ a_{2p} = 0$.

4.2 Série de Taylor d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0. On suppose f de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On appelle **série de Taylor de** f la série entière :

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Proposition. Si f admet un développement en série entière sur $]-r, r[$, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et elle coïncide sur $]-r, r[$ avec la somme de sa série de Taylor :

$$\forall x \in\,]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Remarque. *Attention ! Une fonction peut être $\mathcal{C}^\infty$ sans admettre de développement en série entière.*
Attention ! Une fonction peut admettre une série de Taylor convergente, sans pour autant coïncider avec la somme de cette série.

Exemple. La fonction $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \end{array}$ prolongée par continuité en 0 admet-elle un développement en série entière au voisinage de 0 ?

4.3 Pour montrer qu'une fonction admet un développement en série entière en 0

4.3.1 Opérations sur les fonctions développables en séries entières

Proposition.

- Si f et g admettent des DSE qui sont respectivement $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$, alors $\lambda f + \mu g$ admet un DSE qui est :
$$\sum (\lambda a_n + \mu b_n) x^n$$
Le rayon de convergence a été précisé précédemment.

- Si f et g admettent des DSE qui sont respectivement $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$, alors fg admet un DSE qui est le produit de Cauchy des DSE de f et g :
$$\left(\sum a_n x^n\right) \left(\sum b_n x^n\right)$$
Le rayon de convergence a été précisé précédemment.

- Si f admet un DSE qui est $\sum a_n x^n$, alors f est dérivable, f' admet un DSE qui est :

$$\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$$

Les rayons de convergences sont égaux.

- Si f admet un DSE qui est $\sum a_n x^n$, alors les primitives de f admettent un DSE qui sont :

$$K + \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Les rayons de convergences sont égaux.

4.3.2 Utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral

Rappel : formule de Taylor avec reste intégral. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I contenant 0, alors pour $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}_{R_n(x)}$$

Proposition. Avec les notations précédentes, pour f de classe $\mathcal{C}^\infty$, f admet un DSE(0) si et seulement si $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ sur un voisinage (non vide) de 0.

Remarque. *C'est un résultat plutôt théorique. Même si on l'utilise dans l'exemple suivant, l'utilisation du formulaire du § 4.3.4 est plus efficace, comme c'est le cas dans la recherche de développements limités.*

Exemple. Montrer que la fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

4.3.3 Utilisation d'une équation différentielle

Exemple. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$, et que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Remarque. *Lorsque α est un entier naturel, la fonction est un polynôme et sont développement en série entière est obtenu par la formule du binôme, et est valable sur $\mathbb{R}$.*

4.3.4 Formulaire

Les développements issus de l'exponentielle (Rayon $+\infty$).

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{pour tout } x \in]-\infty, +\infty[$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Les développements issus de la série géométrique, de $(1+x)^\alpha$ (Rayon 1).

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad \text{pour tout } x \in]-1, 1[$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Remarque. *Notons que la fonction* Arctan *est définie sur* $\mathbb{R}$*, mais son développement en série entière sur* $]-1, 1[$ *(ou peut-être* $[-1, 1]$*, mais pas plus).*

4.4 Calcul de la somme d'une série entière

Pistes.

- Connaître le formulaire du § 4.3.4 !
- Reconnaître des combinaisons linéaires (parfois aux premiers termes près) de SE du formulaire.
- Reconnaître des dérivées de SE connues. En particulier, pour $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) x^n$$

- Ne pas hésiter à factoriser par x, x^2 ou alors $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{x^2}$ pour $x \neq 0$ pour ajuster le degré de x.
- On peut dériver $S(x)$ en $S'(x)$, $S''(x)$ et faire apparaître une SE connue ou une équation différentielle satisfaite par $S(x)$.
- Si on connaît une relation de récurrence satisfaite par les a_n, on multiplie par x^n et on somme ces relations, pour obtenir une équation fonctionnelle satisfaite par $S(x)$.

Exemple. Déterminer la somme des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 0} n^2x^n \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(n+1)^2}{n}x^n \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)}{n!}x^n$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)}{(n+2)n!}x^n \qquad \sum_{n\geqslant 0}(2^n+3^n)x^n \qquad \sum_{n\geqslant 0} a_nx^n$$

où $a_{n+1} = 2a_n$

5 Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

5.1 Série géométrique

Proposition. La série entière $\sum z^n$, appelée **série géométrique** de raison z, a pour rayon de convergence 1 et, pour tout $|z| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

5.2 Série exponentielle

Définition. La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$, appelée **série exponentielle** a pour rayon de convergence $+\infty$. On appelle **exponentielle** sa somme, de sorte que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$$

Proposition. Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$$

Proposition. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

6 Exercices et résultats classiques à connaître

6.1 Une somme calculée par une SE

208.1

Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)3^n}$.

6.2 Une somme calculée à l'aide une SE prolongée au bord

208.2

Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

6.3 Une somme calculée de deux façons

208.3

Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ en prolongeant par continuité l'égalité valable sur $]-1,1[$:

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$$

208.4

Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ en utilisant la formule :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n \mathrm{d}t$$

6.4 Le DSE d'Arccos

208.5

Développer $\operatorname{Arccos} x$ en série entière.

6.5 Utiliser un DSE pour prouver une classe $\mathcal{C}^\infty$

208.6

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

(b) Rappeler sans démonstration le DSE de $x \mapsto \operatorname{ch} x$.

(c) c1. Déterminer $S(x)$.

c2. On considère la fonction :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \operatorname{ch}\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ \cos\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

6.6 Convergence de la série de Taylor de $\tan$

208.7

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\tan^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}$$

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan^{(n)}(x) \geqslant 0$.

(c) Montrer que la série de Taylor de la fonction tangente converge sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(d) En désignant par S la somme de la série de Taylor, montrer que $S' = 1 + S^2$.
Montrer ensuite que $S = \tan$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercices de mathématiques

Rayon de convergence

208.8

Déterminer le rayon de convergence des séries entières

a) $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2+1}{3^n}z^n$ b) $\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{e}^{-n^2}z^n$ c) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln n}{n^2}z^{2n}$

d) $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^n}{n!}z^{3n}$ e) $\sum_{n\geqslant 0}n!z^n$ f) $\sum_{n\geqslant 0}\binom{2n}{n}z^n$

g) $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(3n)!}{(n!)^3}z^n$ h) $\sum_{n\geqslant 0}\left(\sqrt[n+1]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)z^n$

208.9

(a) Soit (a_n) une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_nz^n$?

(b) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)z^n$.

208.10

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme des séries entières :

(a) $\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n$ (b) $\sum_{n\geqslant 1}n^{(-1)^n}x^n$

(c) $\sum_{n\geqslant 0}(n^2+1)2^{n+1}x^n$ (d) $\sum a_nx^n$ avec $\begin{cases}a_0=a_1=1\\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ \forall n\end{cases}$

Calcul de somme de série entière

208.11

Utiliser le développement en série entière de la fonction Arctan pour montrer que :

$$\sum_{n=}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

208.12

Soit $(a_n)_n$ la suite définie par :

$$a_n=\begin{cases}1 & \text{si } n=3p\\ 2 & \text{si } n=3p+1\\ 3 & \text{si } n=3p+2\end{cases}$$

Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.

208.13

Calculer la somme et préciser le rayon de convergence des séries entières suivantes :

(a) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{(n+1)!}$ (b) $\sum_{n\geqslant 0}\frac{\cos na}{n!}x^n$

(c) $\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{(2n+1)!}$

208.14

Démontrer que ϕ définie par $\phi(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$ est continue sur $[-1,1]$, et exprimer ϕ au moyen de fonctions usuelles.

208.15

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

(a) Préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ et déterminer, selon la valeur du réel x, la nature de la série $\sum a_n x^n$.

(b) En cas de convergence, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Calculer $(1-x)f(x)$ et en déduire $f(x)$.

Développement en série entière d'une fonction

208.16

Développer en série entière, si c'est possible, les fonctions suivantes. Préciser le rayon de convergence.

(a) $x \longmapsto (1+x)\ln(1+x)$

(b) $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x(1+x)}$

(c) $x \longmapsto \ln(1+x+x^2)$

(d) $x \longmapsto (\text{Arcsin}x)^2$
Utiliser une équation différentielle liant la dérivée et la dérivée seconde.

(e) $x \longmapsto \sin^2 x$.

208.17

Déterminer le développement en série entière à l'origine de la fonction $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ en précisant son rayon de convergence.

208.18

(a) Donner le développement en série entière de $f(x) = \sqrt{1+x}$ et préciser son rayon de convergence.

(b) Donner le rayon de convergence, puis une expression simple de $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n+1)x^{2n}}{(2n)!}$

Petits problèmes d'entrainement

✍ **208.19**

Soit E un ensemble non vide, muni d'une loi de composition interne. On note a_n le nombre de parenthésages possibles d'un produit de n éléments de E. Ainsi, on a $a_1 = 1$ par convention, puis $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$ etc.
On admet pour l'instant que pour tout $n \geqslant 2$:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \tag{1}$$

(a) On s'intéresse à la série entière $\sum a_n x^n$, on note R son rayon de convergence, et on suppose $R > 0$. On note $f(x)$ sa somme. Montrer que, pour tout $x \in \left]-R, R\right[$:

$$(f(x))^2 - f(x) + x = 0$$

(b) Calculer R et $f(x)$.

(c) En déduire l'expression de a_n.

(d) Démontrer la relation (1).

✍ **208.20**

Pour $x \in \,]-1,1[$, on note :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{n}x^n,\ g(x)=f(x)^2,\ h(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}n^2x^n$$

(a) Justifier l'existence d'une suite $(u_n)_n$ telle que :

$$\forall x\in\,]-1,1[,\ g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n$$

(b) Pour $n\in\mathbb{N}$, donner l'expression de u_n sous la forme d'une somme de Riemann et déterminer un équivalent simple de u_n.

(c) Pour $x\in\,]-1,1[$, déterminer l'expression de $h(x)$ et un équivalent de $h(x)$ pour $x\underset{<}{\to}1$.

(d) Déterminer un équivalent de $g(x)$ et de $f(x)$ pour $x\underset{<}{\to}1$.

208.21

Déterminer le rayon de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\sin(n\sqrt{n^2+1})x^n$.

208.22

Pour $n\in\mathbb{N}^\star$, on pose $I_n=\displaystyle\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^n}\,\mathrm{d}t$

(a) Déterminer la limite de (I_n).

(b) Donner un équivalent de (I_n).

(c) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général I_nx^n. Étudier sa convergence en R et en $-R$.

208.23

On considère les suites complexes définies par : $u_0=v_0=1$ et :

$$\forall n\geqslant 0,\ \begin{cases}u_{n+1}=u_n-v_n\\ v_{n+1}=u_n-2v_n\end{cases}$$

On pose alors $u(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n$ et $v(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}v_nx^n$.
Déterminer le rayon de convergence de u et v, et calculer leurs sommes.

208.24

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $W_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,\mathrm{d}t$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum W_nx^n$.

208.25

Pour x réel, on note sous réserve d'existence :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

(a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour $x\in\mathbb{R}$, calculer $f''(x)+f'(x)+f(x)$.

(c) En déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

208.26

Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose :

$$F(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

En développant F en série entière par deux méthodes différentes, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{1}{(2k+1)k!(n-k)!} = (-1)^n \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}$$

208.27

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \mathrm{Card}\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 /\ p+2q = n\}$ qui représente par exemple le nombre de façons de payer n euros avec des pièces de 1 et 2 euros. Développer en série entière la fonction $f \,:\, t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)(1-t^2)}$, et en déduire une expression de a_n en fonction de n.

208.28

Pour $t \in \mathbb{R}$, lorsque c'est possible, on pose $f(t) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{t+n}$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f.

(b) f est-elle continue sur $]-1,1[$? f est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$?

(c) Montrer que f admet un DSE sur $]-1,1[$.

208.29

Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} \mathrm{d}x$.
Montrer que I existe et la calculer grâce à une série entière.

208.30

Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence 1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ et $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g.

(b) Pour tout $x \in]-1,1[$, exprimer $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

208.31

Soit $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ et $R > 0$ donnés. Montrer que, pour n suffisamment grand, P_n n'a pas de racine dans le disque $\overline{D(0,R)}$.

208.32

(a) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs, décroissante, ayant pour limite 0.
Démontrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, et que sa somme est continue sur le segment $[0,1]$.

(b) En partant des développements en série entière de $\ln(1+x)$ et $\mathrm{Arctan} x$, en déduire les égalités suivantes :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$$
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

208.33

On note :

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln n \, x^n \text{ et } g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n$$

(a) Déterminer les rayons de convergence de f et g.

(b) Montrer que g est définie et continue sur $[-1,1[$.

(c) Trouver une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$.

(d) Montrer que f est continue sur $[-1,1[$ et trouver des équivalents de f et g en 1.