Intégrales à paramètre

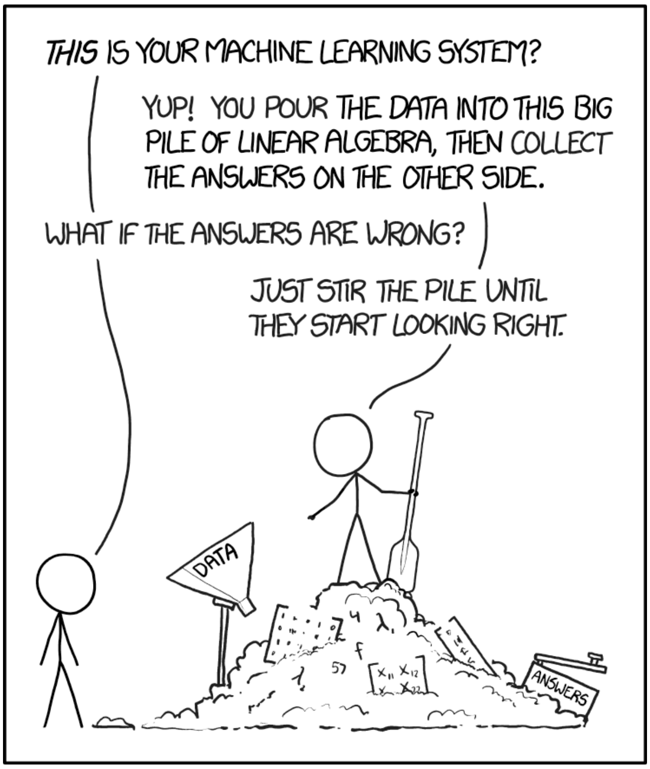
Cours 3

Exercices 8

Pour bien démarrer

1. Qu'est-ce que la convergence simple d'une suite de fonctions ? La convergence uniforme ?
2. Peut-on intervertir $\int$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}$?
3. Énoncer le théorème de convergence dominée.
4. Énoncer le théorème d'intégration terme à terme.
5. Y a-t-il un autre outil pour intervertir $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\int_a^b$?
6. Qu'est ce qu'une fonction intégrable sur un intervalle I ?
7. Fonctions intégrables de référence sur $[1,+\infty[$? Sur $]0,1]$?
8. Inégalités « classiques » :

$$\forall t,\ |\sin t| \leqslant \dots$$
$$\forall t \geqslant 0,\ 0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant \dots$$



https://xkcd.com/1838

Lu dans le programme officiel

Pour l'application pratique des énoncés de ce chapitre, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.

1 Continuité

1.1 Continuité des intégrales à paramètre

Théorème.

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $h : \begin{array}{rcl} A\times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & h(x,t) \end{array}$

Si :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est **continue** sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- h satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que

$$|h(x,t)| \leqslant \varphi(t) \qquad \forall (x,t) \in A\times I$$

  où $\varphi(t)$ est positive, intégrable sur I, et indépendante de x.

Alors :

- pour tout $x \in A$, l'application $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur I
- la fonction : $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur A.

Remarque. *L'hypothèse de domination est vraiment l'hypothèse fondamentale de ce théorème. L'application de ce théorème permet de justifier en particulier que f est définie sur A. Mais l'analyse menée lors de l'étude de la convergence de l'intégrale fournit en général les clefs de la domination.*

Exemple. On note $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$. Donner le domaine de définition de f, et étudier sa continuité.

Remarque. *Lorsque l'intégrale n'est pas généralisée, on peut utiliser comme fonction dominante une fonction constante.*

Exemple. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \cos(xt)\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Raisonnement classique. La continuité étant une propriété locale, on peut appliquer le théorème précédent localement, par exemple sur tout segment de A.

Remarque. *On ne peut pas modifier l'intervalle d'intégration ! Le caractère « local » porte bien sur la variable x, pas la variable d'intégration t.*

Exemple. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin t}{x\sqrt{t}+t}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $]0,+\infty[$.

1.2 Limite des intégrales à paramètre

Théorème de convergence dominée à paramètre continu.

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, a une borne de A et $h : \begin{array}{rcl} A\times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & h(x,t) \end{array}$

Si :

- pour tout $t \in I$, $h(x,t) \xrightarrow[x\to a]{} \ell(t)$;

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I ;
- h satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que

$$|h(x,t)| \leqslant \varphi(t) \qquad \forall (x,t) \in A \times I$$

où $\varphi(t)$ est positive, intégrable sur I, et indépendante de x.

Alors :

- ℓ est intégrable sur I
- $\displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to a]{} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque. *Il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.*

Exemple. On note $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$ et on donne : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v = \sqrt{\pi}$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ pour $x \to +\infty$. Donner un équivalent pour $x \to +\infty$.
2. Déterminer un équivalent de $f(x)$ pour $x \to 0$.

2 Dérivation

Remarque. *Étudier les variations d'une fonction f, c'est comparer $f(x)$ et $f(y)$ pour $x \leqslant y$. On peut souvent le faire en comparant les intégrandes $h(x,t)$ et $h(y,t)$.*

2.1 Classe $\mathcal{C}^1$

Théorème.

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $h : \begin{array}{rcl} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & h(x,t) \end{array}$

Si :

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est cpm et **intégrable** sur I ;
- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est **de classe $\mathcal{C}^1$** sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est cpm sur I ;
- $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \qquad \forall (x,t) \in A \times I$$

où $\varphi(t)$ est positive, cpm et intégrable sur I, et indépendante de x.

Alors :

- la fonction : $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ;
- pour tout $x \in A$: $f'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$

Remarque. *L'hypothèse de domination est l'hypothèse fondamentale. Elle justifie aussi l'intégrabilité de* $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$.

Remarque. *L'intégrabilité de* $t \mapsto h(x,t)$ *est souvent conséquence de la domination du théorème de continuité.*

Exemple. On reprend $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$.

Étudier la dérivabilité de f puis donner une expression simple de $f(x)$.

On donne : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Raisonnement classique. La dérivabilité, la classe $\mathcal{C}^1$ sont des notions locales. On peut donc appliquer le théorème précédent localement, par exemple sur tout segment de A.

Exemple. Pour $x \in]-1,+\infty[$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x\,\mathrm{d}t$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$, et donner une expression de $f'(x)$ à l'aide des fonctions usuelles. En déduire une expression de $f(x)$.

2.2 Extension à la classe $\mathcal{C}^k$

En itérant le théorème de dérivation k-fois, on peut justifier le résultat suivant :

Théorème.

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, $h : \begin{array}{rcl} A\times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & h(x,t) \end{array}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Si :

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est cpm et **intégrable** sur I ;
- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est **de classe** $\mathcal{C}^k$ sur A ;
- pour tout $p \in \{1,\dots,k\}$, pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t)$ est cpm sur I ;
- chaque $\dfrac{\partial^p h}{\partial x^p}$ satisfait l'**hypothèse de domination** :
  pour tout $p \in \{1,\dots,k\}$, il existe φ_p telle que
  $$\left|\frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t)\right| \leqslant \varphi_p(t) \qquad \forall (x,t) \in A\times I$$
  où $\varphi_p(t)$ est positive, cpm et intégrable sur I, et indépendante de x.

Alors :

- la fonction : $f : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A ;
- pour tout $p \in \{1,\dots,k\}$, pour tout $x \in A$: $f^{(p)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t)\,\mathrm{d}t$

3 Exercices et résultats classiques à connaître

3.1 Continuité et limite d'une intégrale à paramètre

209.1

Montrer que $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t^2}\mathrm{d}t \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et déterminer sa limite en $+\infty$.

3.2 L'incontournable fonction Γ

209.2

On pose, pour tout x de $]0, +\infty[$ et pour tout t de $]0, +\infty[$:

$$f(x, t) = \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$$

(a) Démontrer que la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On pose, pour $x \in \,]0, +\infty[$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$$

(b) Démontrer que, pour tout x de $]0, +\infty[$, $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

(c) Démontrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

3.3 Exemple où l'on peut expliciter $f'(x)$

209.3

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{e}^{-xt} \mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f est définie sur $[0, +\infty[$.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Expliciter $f'(x)$ et en déduire une expression simple de $f(x)$ sur $]0, +\infty[$.

(c) On admet que f est continue en 0. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$

(d) *Question difficile facultative :* Démontrer que f est continue en 0.

3.4 Transformée de Fourier

209.4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $t \mapsto tf(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt} f(t) \mathrm{d}t$$

La fonction g est appelée la **transformée de Fourier de** f.
Montrer que g est une application de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.

3.5 Transformée de Laplace

209.5

Pour f continue sur $[0,+\infty[$, à valeurs réelles, on définit sous réserve d'existence :

$$\mathcal{L}\{f\} \;:\; s \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

appelée **transformée de Laplace** de f.
On suppose dorénavant que :

$$\exists k \in \mathbb{N}^*,\; f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(t^k) \tag{H}$$

et on note $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$.

(a) Montrer que F est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

(b) Exploiter la caractéristation séquentielle de la limite et le théorème de convergence dominée pour montrer que $F(s) \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0$.

(c) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et :

$$\forall s > 0,\; F'(s) = -\mathcal{L}\{tf(t)\}$$

3.6 Produit de convolution

209.6

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $f, g \in E$, on pose :

$$(f \star g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

que l'on appelle **produit de convolution** de f et g.

(a) Montrer que $\star$ est une loi de composition interne commutative sur E.

(b) Majorer $\|f \star g\|_\infty$ à l'aide de $\|f\|_\infty$ et $\|g\|_\infty$.

(c) Calculer $f \star g$ lorsque $f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}pt}$ et $g(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}qt}$, où $p, q \in \mathbb{Z}$.

Exercices de mathématiques

209.7

Soit $f\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^3+t^3}$.

(a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et déterminer cette limite.

209.8

Soit $F\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

(a) Déterminer le domaine de définition de F. Étudier la continuité de F sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Déterminer la valeur de $F(0)$.

(c) Déterminer la limite de F en $+\infty$.

209.9

(a) Montrer que $f\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire une expression explicite de $f(x)$.
On donne : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

209.10

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

(b) Montrer que f est solution de l'équation $y' + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}$

(c) Exprimer $f(x)$ à l'aide de $C = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

209.11

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Établir que f est solution d'une équation différentielle linéaire.

(c) Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$. Donner un équivalent de f en 0.

Petits problèmes d'entrainement

✍ **209.12**

On définit :

$$f(x) = \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}\ln t}\,\mathrm{d}t$$

(a) Déterminer le domaine de définition de f, noté D.

(b) Montrer que f est continue sur D.

(c) Déterminer la limite de f en $+\infty$;

(d) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D, et calculer f'.

(e) On pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$. Préciser le domaine de définition de φ et le lien entre φ et f.

(f) En introduisant $\displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt$, déterminer un équivalent de $f(x)$ pour $x \overset{>}{\to} 0$.

✍ **209.13**

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{u^2+x^2}\,du \text{ et } \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x\cos(u)}{u^2+x^2}\,du$$

(a) Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que φ est continue sur $]0,+\infty[$.

(c) Montrer que :

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(d) On note $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\cos(u)-1|}{u^2}du$.

d1. Montrer que cette intégrale existe.

d2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\left|\varphi(x) - \dfrac{\pi}{2}\right| \leqslant Kx$.

(e) La fonction φ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle continue par morceaux sur $\mathbb{R}$?

209.14

On définit :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(\sqrt{x}-t)}{1+t^2}\,dt$$

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Montrer que f est monotone sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$, et la déterminer.

209.15

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t-1}\,dt$

(a) Montrer que $F(x)$ existe pour tout réel x.

(b) Développer $F(x)$ en série de fonctions. Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

209.16

Pour $x > 0$ on note $F(x) = \displaystyle\int_0^{1/x} \frac{dt}{x+\sin^2 t}$

(a) Montrer que F est bien définie et étudier sa monotonie.

(b) Déterminer la limite de F en 0 et en $+\infty$.

(c) Poser $\theta = \tan t$ et déterminer un équivalent de F et 0.

209.17

(a) Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire une expression explicite de $f(x)$.
On donne : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

209.18

Pour x réel, on note $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}dt$.

(a) Déterminer le domaine de définition de g.

(b) Calculer g sur son domaine de définition.

209.19

Soit f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ et } g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(-\frac{x^2}{\cos^2\theta}\right)\,\mathrm{d}\theta$$

(a) Montrer que f^2+g est constante.

(b) EN déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

209.20

Soit $\alpha > 1$ et $f\ :\ t \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(t^2+x^2)^\alpha}$

(a) Déterminer le domaine de défintion de f.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.

(c) Étudier l'intégrabilité de f sur son domaine de définition.

209.21

Soit

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Montrer que F est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de limite nulle en $+\infty$ de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

209.22

Soit $s\ :\ (x,t) \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}\dfrac{x}{t}}{1+t^2}$ et $g\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} s(x,t)\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que $\exists K > 0/\ \forall x \geqslant 0$ et $t > 0$, $|s(x,t)| \leqslant \dfrac{K}{1+t^2}$. Montrer que g est définie et continue sur $[0,+\infty[$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que g est $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon,+\infty[$, puis sur $]0,+\infty[$.

(c) Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^2-1}$ est prolongeable en une fonction h continue sur $]0,+\infty[$ et que h est intégrable sur $]0,+\infty[$.

(d) En utilisant (sans démonstration) la relation $\dfrac{1}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \dfrac{1}{x^2-1}\left(\dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{1}{1+x^2t^2}\right)$, déterminer une relation entre g et h. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\mathrm{d}t$.

209.23

(a) Déterminer le domaine de définition réel de :

$$F\ :\ t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{(-u^2+\mathrm{i})t^2}}{u^2-\mathrm{i}}\mathrm{d}u$$

(b) Quelle est la limite de $F(t)$ en $+\infty$?

(c) Déterminer F'.

(d) On admet que $F(0) = \pi\dfrac{1+\mathrm{i}}{2\sqrt{2}}$.

En déduire les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t$.