Équations différentielles linéaires

Cours 3

1 Équations différentielles linéaires scalaires . . . 3
2 Compléments de cours . . . 4
2.1 Complément : raccordement des solutions . . . 4
2.2 Complément : détermination de solutions particulières . . . 4
2.3 Complément : retour sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants 5
3 Exercices et résultats classiques à connaître . . . 6
3.1 Variation de la constante . . . 6
3.2 Changement de fonction inconnue . . . 6
3.3 Changement de variable . . . 6
3.4 Recherche d'une solution DSE et méthode de Lagrange . . . 6

Exercices 7

Exercices de mathématiques . . . 7
Petits problèmes d'entrainement . . . 7

Pour bien démarrer

1. Qu'est-ce qu'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ? Homogène ?
   Donner un exemple d'équation différentielle non linéaire d'ordre 1 (resp. d'ordre 2) ?
2. Résolution de $y' + a(x)y = 0$?
3. Structure de l'ensemble des solutions de $y' + a(x)y = b(x)$?
4. Qu'est-ce que la méthode de variation de la constante ?
5. Principe de superposition ?
6. Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy ?
7. Régime libre, régime forcé ? Régime transitoire, régime établi ?
8. Dans quel contexte parle-t-on d'équation caractéristique associée ?
9. Résolution de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$? Cas particulier où a et b sont réels ?
10. Comment détermine-t-on une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $x \mapsto A\mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$?
    $x \mapsto B\cos(\omega x)$? $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$?

https://xkcd.com/2708

Lu dans le programme officiel

Remarque. *Avant toute résolution d'une équation différentielle, on commence par reconnaître (et annoncer) le **type de l'équation différentielle** et se placer sur un **intervalle** où les résultats s'appliqueront.*

Remarque. *Les résultats de première année concernant la résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre sont à bien connaître.*

1 Équations différentielles linéaires scalaires

Définition. Soit a, b et c trois fonctions continues : $I \to \mathbb{K}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. L'équation :

$$(E)\ :\ y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

est appelée **équation différentielle linéaire (scalaire) d'ordre** 2.
On appelle **équation homogène associée à** (E) l'équation :

$$(E_0)\ :\ y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

où le second membre a été remplacé par 0.
On dit que $y\ :\ I \to \mathbb{K}$ est une **solution** de (E) sur I lorsque :

- y est deux fois dérivable sur I
- $\forall t \in I,\ y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$

Remarque. *Lorsqu'une équation est donnée sous la forme :*

$$\alpha(t)y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = \delta(t)$$

*où α, β, γ et δ sont continues, on commence par définir un intervalle I sur lequel α ne s'annule pas et sur lequel l'équation est **normalisable** :*

$$y'' + \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}y' + \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}y = \frac{\delta(t)}{\alpha(t)}$$

Pour appliquer les résultats de ce chapitre, il est donc important de travailler sur un intervalle, d'avoir une équation normalisable. Contrairement au cas des équations différentielles linéaires d'ordre 1, il n'est en général pas utile de normaliser l'équation car il n'y a pas de formule de résolution à appliquer.

Proposition. On conserve les notations et hypothèses de la définition.
L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions sur I de l'équation homogène (E_0) est un espace vectoriel, sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$.

Proposition. On conserve les notations et hypothèses de la définition.
On suppose disposer de y_1, solution particulière de (E).
L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur I de l'équation (E) est l'espace affine passant par y_1 et dirigé par $\mathcal{S}_0$:

$$\mathcal{S} = y_1 + \mathcal{S}_0$$

c'est-à-dire que les solutions y de (E) sont les sommes de la solution particulière y_1 et d'une solution quelconque de l'équation (E_0).

Théorème de Cauchy linéaire.

On conserve les notations et les hypothèses de la définition : I est un intervalle, a, b et c sont continues sur I.
Soit $t_0 \in I$, $y_0, y_0' \in \mathbb{K}$.
Le **problème de Cauchy** :

$$(P)\ :\ \begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

admet une solution et une seule sur I.

Corollaire. Toujours avec les notations et hypothèses de la définition : I est un intervalle, a, b et c sont continues sur I.
Alors l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène (E_0) est un espace vectoriel de dimension 2.

Remarque.

- *Pour connaître $\mathcal{S}_0$, il suffit donc de connaître deux solutions y_0^1 et y_0^2 non proportionnelles de (E_0). On dit parfois que (y_0^1, y_0^2), base de $\mathcal{S}_0$, est un* ***système fondamental de solutions****.*
- *$\mathcal{S}$ est donc un sous-espace affine de dimension 2, c'est-à-dire un plan affine. Si y_1 est une solution particulière de (E) et y_0^1, y_0^2 deux solutions non proportionnelles de (E_0), alors :*

$$\mathcal{S} = y_1 + \mathrm{Vect}(y_0^1, y_0^2)$$

2 Compléments de cours

2.1 Complément : raccordement des solutions

Remarque. *Aucun résultat spécifique n'est à notre programme. Si on a été amené, lors de la résolution de l'équation différentielle, à travailler sur des intervalles disjoints, on peut se poser la question du raccordement des solutions.*

Exemple.

1. Résoudre l'équation différentielle : $(\mathrm{e}^x - 1)y' + \mathrm{e}^x y = 1$.
2. Étudier le raccordement des solutions.

Exemple. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $y'' + y = |x|$.

2.2 Complément : détermination de solutions particulières

Remarque. *Aucun résultat spécifique n'est à notre programme. Il s'agit donc de se laisser guider par l'énoncé, qui peut nous inciter à rechercher une solutions particulière de (E_0) puis effectuer un changement de fonction inconnue, ou deux solutions particulières non proportionnelles de (E_0), et une solution particulière de (E) etc.*

Remarque. *On pourra rechercher des solutions particulières (de (E) ou (E_0)) sous une forme donnée, par exemple polynomiale, exponentielle ou développable en série entière.*

Exemple. On travaille sur $I =]0, +\infty[$.

1. Déterminer les solutions polynomiales de l'équation $(E)\ :\ x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 0$.
2. Vérifier que $x \mapsto \frac{1}{x}$ est solution, puis conclure.

Exemple. Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + 6xy' + (6 - x^2)y = 1$$

Principe de supersposition. On s'intéresse aux équations dont le second membre s'écrit comme somme de deux ou plusieurs fonctions :

$$(E)\ :\ y'' + a(t)y' + b(t)y = c_1(t) + c_2(t)$$

Si y_1 (resp. y_2) est une solution particulière de $(E_1)\ :\ y'' + a(t)y' + b(t)y = c_1(t)$ (resp. $(E_2)\ :\ y'' + a(t)y' + b(t)y = c_2(t)$), alors $y_1 + y_2$ est une solution particulière de (E).

2.3 Complément : retour sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants

Étude. Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$, avec $a \neq 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$. On s'intéresse à :

$$(E) \,:\, ay'' + by' + cy = f(t)$$

qui est une **équation différentielle linéaire d'ordre** 2 **à coefficients constants**. L'équation homogène associée s'écrit, sous forme matricielle :

$$(E_0) \,:\, X' = AX$$

où $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = \frac{1}{a}(aX^2 + bX + c)$.

Définition. On appelle **équation caractéristique** de (E_0) l'équation :

$$ar^2 + br + c = 0$$

Théorème.

On conserve les notations précédentes.

- Si l'équation caractéristique a deux racines distinctes r_1 et r_2, alors :

$$\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \mathrm{e}^{r_1 t}, t \mapsto \mathrm{e}^{r_2 t}\right)$$

- Si l'équation caractéristique a une racine double r_0, alors :

$$\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \mathrm{e}^{r_0 t}, t \mapsto t\,\mathrm{e}^{r_0 t}\right)$$

Remarque. *Dans le cas particulier, mais fréquent en physique, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et où l'équation caractéristique admet deux racines distinctes complexes conjuguées $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$, on a :*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t), t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)\right) \\ &= \left\{t \mapsto A\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t + \varphi),\ A, \varphi \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

Remarque. *Il n'y a pas de résultat généraux à notre programme pour la recherche d'une solution particulière de l'équation complète, sauf dans les cas suivants :*

Méthode. On recherche une solution particulière de l'équation :

$$ay'' + by' + cy = A\mathrm{e}^{\lambda t}$$

avec a, b, c des coefficients réels.

- Si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme :

$$t \mapsto B\mathrm{e}^{\lambda t}$$

- Si λ est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme :

$$t \mapsto Bt\mathrm{e}^{\lambda t}$$

- Si λ est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme :

$$t \mapsto Bt^2\mathrm{e}^{\lambda t}$$

Méthode. On recherche une solution particulière de l'équation :

$$ay'' + by' + cy = A\cos(\omega t) \qquad \text{(resp. } A\sin(\omega t)\text{)}$$

avec a, b, c des coefficients réels et $\omega \neq 0$.

- Si $\mathrm{i}\omega$ (et donc $-\mathrm{i}\omega$) n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme :
$$t \mapsto \lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)$$
- Si $\mathrm{i}\omega$ (et donc $-\mathrm{i}\omega$) est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme :
$$t \mapsto \lambda t\cos(\omega t) + \mu t\sin(\omega t)$$

3 Exercices et résultats classiques à connaître

3.1 Variation de la constante

210.1

Résoudre en appliquant la méthode de variation de la constante l'équation différentielle :

$$(1+x^2)y' - 2xy = 1 + x^2$$

3.2 Changement de fonction inconnue

210.2

Résoudre :

$$(x^2+1)y'' - (3x^2-4x+3)y' + (2x^2-6x+4)y = 0$$

en utilisant le changement de fonction inconnue $z = (x^2+1)y$.

3.3 Changement de variable

210.3

Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation :

$$x^2y'' + xy' + y = 0$$

en effectuant le changement de variable $t = \ln x$.

3.4 Recherche d'une solution DSE et méthode de Lagrange

210.4

On souhaite résoudre sur $]0,1[$ l'équation :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$$

(a) Déterminer une solution développable en série entière y_0.

(b) Résoudre l'équation en posant $y = z\,y_0$.

Exercices de mathématiques

210.5

Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes :

(a) $x' + x = t^2$

(b) $2tx' + x = \dfrac{1}{t}$

(c) $xy' - y = x \ln x$

210.6

Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} (1-t^2)x' + (t-2)x = 0 \\ x(0) = \mathrm{e} \end{cases}$.

210.7

Trouver toutes les applications $f\ :]-1,1[\to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x)f(-x) = \frac{1}{1-x^2}$$

210.8

Résoudre sur $]1,+\infty[$ l'équation différentielle $y' + \dfrac{x}{1-x^2}y = 2x$.

210.9

Résoudre les équations différentielles :

(a) $y'' - 2y' + y = \operatorname{ch} t$

(b) $x'' + x' + x = t^2 + \mathrm{e}^t$

(c) $x'' + 2x' + x = \mathrm{e}^{-t}$.

210.10

On considère l'équation différentielle $t^2y'' + 4ty' + 2y = 1$.

(a) Déterminer la solution générale sur $]0,+\infty[$ à l'aide du changement de variable $t = \mathrm{e}^x$.

(b) Déterminer la solution générale sur $]-\infty,0[$.

210.11

Montrer que l'équation différentielle $x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1$ admet une unique solution DSE.

210.12

Déterminer une solution DSE de l'équation différentielle :

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x)$$

Exprimer cette solution à l'aide des fonctions usuelles.

Petits problèmes d'entrainement

✍ **210.13**

Soit l'équation différentielle :

$$(E)\ (2t+1)x'' + (4t-2)x' - 8x = 0$$

(a) Déterminer les solutions de (E) du type $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}$.

(b) Déterminer les solutions polynomiales de (E).

(c) Déterminer les solutions de (E) sur des intervalles à préciser.

(d) Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

✍ **210.14**

On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$(t-1)y'' - ty' + y = 0 \quad (E)$$

(a) Déterminer deux solutions « évidentes » de (E).

(b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

210.15

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que :

$$f + f'' \geqslant 0$$

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+\pi) + f(x) \geqslant 0$$

210.16

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et g une solution non nulle de :

$$y'' + f(x)y = 0 \quad (E)$$

(a) Montrer que les zéros de g sont isolés.

On note x_1 et x_2 deux zéros consécutifs de g, avec $x_1 < x_2$.

(b) Montrer que, pour $x \in [x_1, x_2]$:

$$(x_2 - x)\int_{x_1}^{x} (t - x_1) f(t) g(t)\,\mathrm{d}t + (x - x_1)\int_{x}^{x_2} (x_2 - t) f(t) g(t)\,\mathrm{d}t = (x_2 - x_1) g(x)$$

(c) En déduire une minoration de :

$$\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

210.17

On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$xy'' + y' + y = 0 \quad (E)$$

(a) Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.

On considère maintenant f une solution de (E).

(b) Montrer que $xf'^2(x) + f^2(x)$ possède une limite finie en $+\infty$.

(c) En déduire que f est bornée au voisinage de $+\infty$ et que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

(d) Justifier la convergence des trois intégrales :

$$\int_1^{+\infty} -f'^2(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_1^{+\infty} \frac{f'(x)f(x)}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \int_1^{+\infty} \frac{f^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

(e) En déduire la limite de f en $+\infty$.