# Fonctions vectorielles

## Cours

## Pour bien démarrer

1. Théorème de Rolle ?
2. Théorème des accroissements finis ? (Égalité et inégalité)
3. Quelle est l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f$ (dérivable) au point $(a, f(a))$ ?
4. Théorème de la « bijection » ?
5. Condition suffisante pour que $f$ bijective dérivable en $a$ soit telle que $f^{-1}$ soit dérivable en $b = f(a)$ ? Formule de $\left(f^{-1}\right)'(b)$ ?
   Application aux dérivées des fonctions Arcsin, Arcos, Arctan.
6. Dérivation d'une composée ? D'un produit ?
7. Formule de leibniz (dans le cadre de la dérivation) ?
8. (a) Définition de $f$ dérivable en $a$ ?
   (b) Théorème limite de la dérivée ?
   (c) Outils pour prouver la dérivabilité (en un point précis ou sur un intervalle) ?
9. Définition des fonctions $\mathcal{D}^k$ ? $\mathcal{C}^k$ ?
   Lien entre les deux ?
   Chaîne d'inclusions entre tous ces ensembles ?
10. Caractérisation des fonctions dérivables strictement monotones sur un intervalle ?

Dans ce chapitre, on étudie les fonctions : $I \to \mathbb{R}^n$ où $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide. On appelle ces fonctions des **fonctions vectorielles**, par opposition au cas particulier où $n = 1$, qui correspond aux **fonctions scalaires**.

**Remarque.** *La différence essentielle entre les fonctions vectorielles et les fonctions scalaires vient du fait que, pour $n \geqslant 2$, il n'y a pas d'ordre sur $\mathbb{R}^n$ compatible avec les opérations usuelles.*

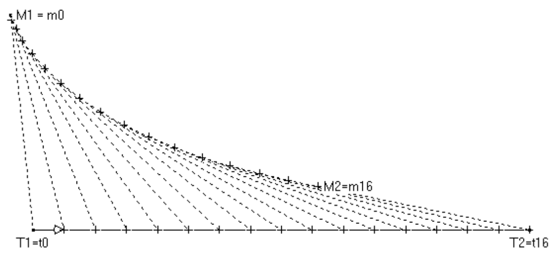
## Interprétation cinématique

Le mouvement d'un point est en général décrit par l'évolution de sa position au cours du temps. Que le mouvement soit plan ou dans un espace de dimension 3, il prend donc la forme d'une fonction vectorielle (à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) :

$$f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{ou} \quad f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

**Exemple.** Le mouvement d'une masse attachée à une corde, elle-même attachée à un mobile suivant un mouvement rectiligne uniforme est décrit par :

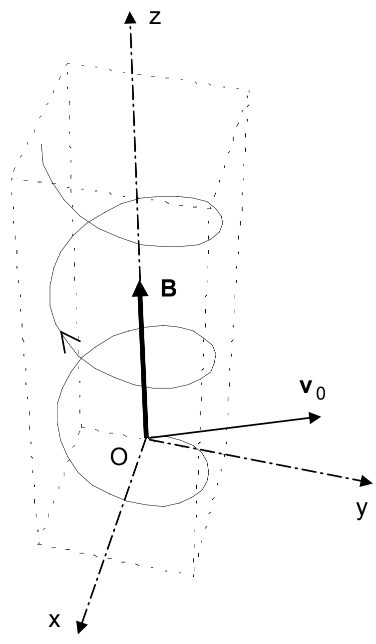
$$\begin{cases} x(t) = t - \dfrac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)} \\ y(t) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\, t} \end{cases}$$






**Exemple.** Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique est donné, avec les constantes qui vont bien, par

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{v_0 \sin(\alpha)}{\omega_c}(1 - \cos(\omega_c t)) \\ y(t) = \dfrac{v_0 \sin(\alpha)}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \\ z(t) = v_0 \cos(\alpha) t \end{cases}$$



# 1 Dérivabilité et opérations sur les fonctions dérivables

## 1.1 Généralités

**Définition.** Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $a \in I$. On appelle **taux d'accroissement** de $f$ en $a$ l'application définie sur $I \setminus \{a\}$ :

$$t \mapsto \frac{1}{t-a}(f(t) - f(a))$$

On dit que $f$ **est dérivable en** $a$ si et seulement si le taux d'accroissement de $f$ en $a$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}^n$ en $a$.

Cette limite s'appelle dans ce cas la **dérivée de** $f$ **en** $a$, notée $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(a)$

**Remarque.** *Pour montrer la dérivabilité par une recherche effective de limite, on cherche la limite de :*

$$\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)$$

*lorsque $h \to 0$.*

*On peut définir la dérivabilité à droite, à gauche.*

**Proposition.** Avec les notations précédentes, $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si $f$ admet un développement limité à l'ordre 1 en $a$ :

$$f(a+h) = f(a) + \ell\, h + h\varepsilon(h)$$

où $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

Dans ce cas, $\ell = f'(a)$.

**Remarque.** *Attention, l'égalité est ici vectorielle.*

*Comme pour les fonctions scalaires, on notera* $\mathrm{o}(h)$ *une fonction vectorielle qui s'écrit $h\varepsilon(h)$, où $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.*

**Définition.** Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$. On dit que $f$ est **dérivable sur** $I$ si et seulement si elle est dérivable en tout point $a$ de $I$.

On définit dans ce cas :

$$\begin{array}{rccc} f' : & I & \to & \mathbb{R}^n \\ & t & \mapsto & f'(t) \end{array}$$

la **fonction dérivée** de $f$.

**Notation.** On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de $I \to \mathbb{R}^n$ qui sont dérivables sur $I$.

**Proposition.** Toute fonction dérivable sur $I$ est continue sur $I$.

**Remarque.** *Si $f$ décrit un mouvement ponctuel, $f'(a)$ représente le* **vecteur vitesse** *à l'instant $t = a$.*

*Lorsque la fonction dérivée est elle-même dérivable, $f''(a)$ désigne le* **vecteur accélération**.

## 1.2 Dérivation par coordonnées

On suppose dans ce paragraphe $\mathbb{R}^n$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

**Proposition.** Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle, $f_1, \dots, f_n$ les fonctions coordonnées de $f$ dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire :

$$\forall t \in I,\ f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) e_i$$

Fixons $a \in I$.

$f$ est dérivable en $a$ si et seulement si chaque $f_i$ est dérivable en $a$, et dans ce cas :

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a) e_i$$

**Remarque.** *Le résultat s'étend à la dérivabilité sur $I$.*
Plus généralement, le résultat s'applique pour les fonctions $I \to E_n$ où $E_n$ est un espace vectoriel de dimension finie (muni par exemple de la norme $\|\cdot\|_\infty$).
**Exemple.** Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{it} \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
**Exemple.** Dans le plan euclidien usuel, on note $R(t)$ la matrice de la rotation d'angle $t$. Montrer que $t \mapsto R(t)$ est dérivable, et que sa dérivée est la matrice d'une rotation.

## 1.3 Fonctions constantes

**Proposition.** Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$. Il est ici essentiel que $I$ soit un intervalle de $\mathbb{R}$.

$$f \text{ est constante sur } I \text{ si et seulement si } \begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I \\ \forall t \in \mathring{I},\ f'(t) = 0 \end{cases}$$

## 1.4 Opérations sur les fonctions dérivables

**Théorème.**

Si $f$ et $g$ sont deux fonctions de $I \to \mathbb{R}^n$ dérivables sur $I$, alors les combinaisons linéaires $\lambda f + \mu g$ sont dérivables sur $I$ et on a :

$$\forall t \in I,\ (\lambda f + \mu g)'(t) = \lambda f'(t) + \mu g'(t)$$

**Remarque.** *Cela signifie que $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel, et que la dérivation est un opérateur linéaire.*
**Théorème.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable sur $I$ et $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ une application linéaire.
Alors $L \circ f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^p)$ est dérivable sur $I$ et :

$$\forall t \in I,\ (L \circ f)'(t) = L(f'(t))$$

**Théorème.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : I \to \mathbb{R}^p$ deux fonctions dérivables et $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une application bilinéaire.
Alors $B(f, g) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^q)$ est dérivable sur $I$ et :

$$\forall t \in I,\ (B(f, g))'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$$

**Remarque.** *On a noté abusivement $B(f, g)$ l'application :* $\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^q \\ t & \mapsto & B(f(t), g(t)) \end{array}$
**Généralisation.**

Soit $f_1, \dots, f_p : I \to \mathbb{R}^n$ des fonctions dérivables et $M : (\mathbb{R}^n)^p \to \mathbb{R}^q$ une application $p$-linéaire.
Alors $M(f_1, \dots, f_p) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^q)$ est dérivable sur $I$ et :

$$\forall t \in I,\ (M(f_1, \dots, f_p))'(t) = \sum_{k=1}^{p} M(f_1(t), \dots, f_k'(t), \dots, f_p(t))$$

**Exemple.**

- Si $f, g$ sont deux fonctions scalaires $I \to \mathbb{R}$ dérivables, alors leur produit $f \times g$ est dérivable sur $I$, et :
$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$$

- Si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont des fonctions scalaires dérivables sur $I$, et $f = f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n$, alors $f$ est dérivable sur $I$, et :
$$(f_1 f_2 \ldots f_n)' = f_1' f_2 \ldots f_n + f_1 f_2' \ldots f_n + \cdots + f_1 f_2 \ldots f_n'$$

**Exemple.** Soit $f, g \ : \ I \to \mathbb{R}^2$ deux fonctions dérivables sur $I$. On note $h \ : \ t \mapsto \det(f(t), g(t))$. Montrer que $h$ est dérivable sur $I$ et donner l'expression de sa dérivée.

**Exemple.**

- Soit $f, g \ : \ I \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions dérivables sur $I$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne. On note $\langle f, g \rangle \ : \ t \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle$. Montrer que $\langle f, g \rangle$ est dérivable sur $I$ et donner l'expression de sa dérivée.

- Soit $f \ : \ I \to \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable sur $I$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Alors $\|f\| \ : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \|f(t)\| \end{array}$ est une fonction « usuelle » d'une variable réelle, à valeurs réelles. Est-elle dérivable ? Comment la dériver ? Comment caractériser les mouvements tels que $\|f\|$ est constant ?

**Théorème.**

Soit $f \ : \ I \to \mathbb{R}^n$ et $\varphi \ : \ J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On suppose que $\varphi(J) \subset I$.
Alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur $J$ et :
$$\forall t \in J, \ (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) \cdot f'(\varphi(t))$$

# 2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

## 2.1 Définitions

**Définition.** Soit $f \ : \ I \to \mathbb{R}^n$. On fait la définition suivante, par récurrence :

- On note $f^{(0)} = f$.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé. On suppose que $f^{(k-1)}$ est définie.
Si $f^{(k-1)}$ est dérivable sur $I$, on dit que $f$ est **$k$-fois dérivable sur** $I$, et on pose $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$.
Si de plus $f^{(k)}$ est continue sur $I$, on dit que $f$ est **de classe $\mathcal{C}^k$ sur** $I$.

- Si $f$ est $k$-fois dérivable pour tout $k \in \mathbb{N}$, on dit que $f$ est **de classe $\mathcal{C}^\infty$**.

**Notation.** On note $\mathcal{D}^k(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $k$-fois dérivables sur $I$, et $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^n)$) l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur $I$.

## 2.2 Opérations

**Proposition.**

- Si $f$ et $g$ sont $\mathcal{C}^k$, alors leurs combinaisons linéaires aussi et :

$$(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$$

- $\mathcal{D}^k(I, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ sont des espaces vectoriels réels.
- $\mathcal{C}^\infty \subset \mathcal{C}^{k+1} \subset \mathcal{D}^{k+1} \subset \mathcal{C}^k \subset \mathcal{D}^k$

**Théorème.**

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n) &\iff f \text{ est dérivable sur } I \text{ et } f' \in \mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{R}^n) \\ &\iff f \in \mathcal{D}^{k-1}(I, \mathbb{R}^n) \text{ et } f^{(k-1)} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

**Formule de Leibniz.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : I \to \mathbb{R}^p$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ et $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une application bilinéaire.
Alors $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$ et :

$$\forall t \in I,\ (B(f, g))^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B(f^{(i)}(t), g^{(k-i)}(t))$$

**Exemple.** Soit $E$ un espace vectoriel euclidien, et $f, g \in \mathcal{C}^k(I, E)$. Montrer que $\langle f, g \rangle$ est $\mathcal{C}^k$ et donner l'expression de sa dérivée $k$-ème.

**Théorème.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $\varphi : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. On suppose que $\varphi(J) \subset I$.
Alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $J$.

# 3 Exercices et résultats classiques à connaître

## 3.1 Utiliser la formule de Leibniz

**211.1**

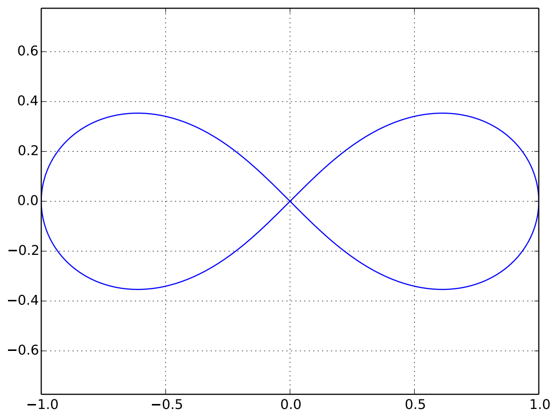
On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$ pour $x > -1$.
Calculer $f^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

# 4 Compléments de cours

## 4.1 Complément : tracé d'arc paramétré avec Python

Pour représenter la lemniscate, paramétrée par : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{\sin t}{1+\cos^2 t} \\ y(t) = \dfrac{\sin t \cos t}{1+\cos^2 t} \end{cases}$

```python
#! /usr/local/bin/python3
# -*- coding:utf-8 -*-

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def x(t):
    return np.sin(t) / (1+np.cos(t)**2)

def y(t):
    return np.sin(t) * np.cos(t) / (1+np.cos(t)**2)

les_t = np.linspace(0, 2*np.pi, 1000)
les_x = [x(t) for t in les_t]
les_y = [y(t) for t in les_t]
plt.figure(0)
plt.plot(les_x,les_y)

# Ou alors, en utilisant les fonctions vectorialisées
T = np.linspace(0, 2*np.pi, 1000)
X = np.sin(T) / (1+np.cos(T)**2)
Y = np.sin(T) * np.cos(T) / (1+np.cos(T)**2)
plt.figure(1)
plt.plot(X,Y)
plt.grid()
plt.axis('equal')

plt.savefig('./trace_lemniscate.pdf')
```



## Exercices de mathématiques

**211.2**

Déterminer les dérivées $n$-ièmes des fonctions :

$$f\ :\ x \mapsto \mathrm{e}^x \sin(x) \text{ et } g\ :\ x \mapsto x^{n-1} \ln(x)$$

## Petits problèmes d'entrainement

**211.3**

Soit $n$ un entier impair et $M\ :\ u \in \mathbb{R} \mapsto M(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dérivable. Montrer que, pour tout $u$ réel, $M'(u)$ n'est pas inversible.

**211.4**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & \ddots & \vdots \\ x^3/3! & x^2/2! & x & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ x^n/n! & & & x^2/2! & x \end{vmatrix}$$

(a) Montrer que $D_n$ est dérivable et exprimer, pour $n \geqslant 2$, $D_n'(x)$ en fonction de $D_{n-1}(x)$.

(b) En déduire l'expression de $D_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.