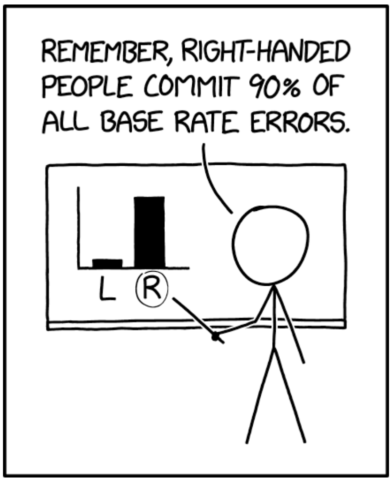
Probabilités

Cours 3

Exercices 15



https://xkcd.com/2476

Lu dans le programme officiel

• • •

1 Vocabulaire probabiliste

Définition. Dans un contexte de probabilités :

- l'**univers** désigne un ensemble noté Ω, dont les éléments, notés ω, sont les **épreuves** ou **issues** ou encore **réalisations de l'expérience aléatoire**.
- un **événement** est une collection d'épreuves[1], donc une partie de Ω.
- si A est un événement, son contraire $\overline{A}$ est un événement.
- si A est un événement et ω une épreuve, on dit que ω **réalise** A lorsque $\omega \in A$.
- deux événements A et B sont **disjoints** s'ils ne peuvent être réalisés simultanément : $A \cap B = \varnothing$.
- un **système complets d'événements** est une famille $(A_i)_i$ d'événements deux à deux disjoints, et dont l'union est Ω.
- une **variable aléatoire**[2] est une application définie sur Ω, qui associe à ω un élément d'un ensemble E (en général, $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{N}$)
  Et, pour $x \in X(\Omega)$, $(X = x) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\}$ est l'événement qui regroupe toutes les épreuves qui « valent » x par X.

Remarque. *Deux événements disjoints sont parfois qualifiés d'**incompatibles**, mais on évitera d'utiliser ce vocabulaire.*

Proposition. Lorsque X est à valeurs réelles, $(X \geqslant x)$ est un événement.
Pour $A \subset E$, $(X \in A)$ est un événement.

Exemple. On considère le lancer d'une pièce.

- Un univers naturel pour représenter les deux issues possibles  et  est :

$$\Omega = \{P, F\}$$

- Il y a 4 événements naturels.

Exemple. Un joueur de loto coche 5 cases parmi les 49 proposées, plus un numéro « chance » pris entre 1 et 10. Il veut savoir s'il va gagner le gros lot.

- Un univers décrivant cette expérience est :

$$\Omega = \{\text{gagne}, \text{perd}\}$$

- Un autre univers est :

$$\Omega = \{\text{5-combinaisons de } [\![1, 49]\!]\} \times [\![1, 10]\!]$$

Exemple. Lorsque l'on joue au jeu de l'oie, on lance simultanément deux dés équilibrés à six faces.

- Un univers naturel pour représenter les issues possibles :
  ⚀⚀ ⚀⚁ ⚀⚂ ... ⚂⚅ ⚃⚀ ⚃⚁ ... ⚃⚅ ⚄⚅ ⚅⚅
  est :

$$\Omega = [\![1, 6]\!]^2$$

- « Faire un double-six » est un événement élémentaire, représenté par le singleton $\{(6, 6)\}$.

[1] on explique au § 5.3 plus précisément ce qu'est l'ensemble des événements, noté $\mathscr{A}$ et appelé **tribu**.
[2] on précisera au chapitre suivant la définition formelle d'une variable aléatoire discrète

- « Faire au moins 10 » est un événement, représenté dans Ω par le sous-ensemble :

$$B = \{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

- Mais au jeu de l'oie, plutôt que ω, c'est le *nombre* somme des valeurs obtenues avec les deux dés qui nous intéresse. On note X la v.a. de la somme des valeurs obtenues. On a alors :

$$X\big((6,6)\big) = 12 \text{ et } B = (X \geqslant 10)$$

Exemple. On s'intéresse à l'expérience suivante : on répète le lancer d'une pièce, les lancers étant considérés comme indépendants.

- Pour mieux comprendre, on peut « mimer » quelques réalisation de cette expérience aléatoire :

$$\begin{array}{ll} \omega_1 = FPFPPFPFFPPFPFFP\dots & \\ \omega_2 = FFPFFPFPPFPFFPPF\dots & \\ \omega_3 = FFFFFFFFFFFFFFFF\dots & \text{uniquement des Faces} \\ \omega_4 = PFPFPFPFPFPFPFPF\dots & \text{alternance parfaite Pile/Face} \end{array}$$

  On comprend alors qu'il est naturel de choisir

$$\Omega = \{P,F\}^{\mathbb{N}^*}$$

  Cet univers est énorme (il n'est même pas dénombrable : voir § 5.2).

- On s'intéresse à des « collections d'épreuves », que l'on appelle des **événements** :
  $P_3 =$ « le troisième lancer a donné Pile »

  Cet événement est réalisé par ω_2 et ω_4, mais pas par ω_1 ni ω_3.

- Plus généralement, on peut noter :
  $P_k =$ « le k-ième lancer a donné Pile »
  $F_k =$ « le k-ième lancer a donné Face »

  et faire des opérations sur ces événements pour construire de nouveaux événements :

$$E_1 = F_1 \cap P_2 \cap F_3,\ E_2 = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k,\ E_3 = P_3 \cap F_3$$

  et se demander si les épreuves précédentes réalisent ou non ces événements.

- Une façon de comprendre l'événement P_2 est d'écrire :

$$P_2 = \{\star P \star\star\star\star\star\star\dots\} \subset \Omega$$

- On note X le rang d'apparition du premier Pile : c'est une v.a. avec $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et :

$$X(\omega_1) = 2,\ X(\omega_2) = 3,\ X(\omega_3) = +\infty \text{ et } X(\omega_4) = 1$$

  L'épreuve ω_2 réalise l'événement $(X = 3)$, et $(X = 3) = F_1 \cap F_2 \cap P_3$.

2 Probabilité

2.1 Définition

Définition. On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathscr{A})$ une application P définie sur $\mathscr{A}$ telle que :

- P est à valeurs dans $[0, 1]$
- $P(\Omega) = 1$
- Si $(A_n)_{n\in N}$ est une famille au plus dénombrable d'événements deux à deux disjoints :
$$P\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) = \sum_{n\in N} P(A_n) \qquad \text{(propriété de } \sigma\text{-additivité)}$$

On dit alors que $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un **espace probabilisé**.

Remarque. *Si Ω est dénombrable, on peut écrire $\Omega = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. Si de plus $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, alors par σ-additivité, $\sum P(\{x_n\})$ converge et sa somme vaut 1. Et si $A \subset \Omega$, A est dans $\mathscr{A}$ et $P(A) = \sum_{x\in A} P(\{x\})$: la situation est analogue à celle où Ω est fini.*

Proposition.

- $P(\varnothing) = 0$
- Si $A \in \mathscr{A}$, alors $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$
- Si $A, B \in \mathscr{A}$, alors $A \subset B \implies P(A) \leqslant P(B)$.
- Si $A, B \in \mathscr{A}$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Proposition. La σ-additivité, sans l'hypothèse « disjointe », devient :
$$P\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) \leqslant \sum_{n\in N} P(A_n)$$

Remarque. *On convient que, s'il s'agit d'une famille infinie et que la série à terme général positif $\sum P(A_n)$ diverge, sa somme vaut $+\infty$.*
Ce résultat porte parfois le nom de sous-additivité ou encore d'inégalité de Boole. Il est souvent peu intéressant car on a toujours la majoration :
$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant 1$$

2.2 Continuité croissante et décroissante

Remarque.

- *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, c'est-à-dire que pour tout n, $A_n \subset A_{n+1}$, alors $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est aussi un événement, « limite » des A_n.*
- *Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements, c'est-à-dire que pour tout n, $B_{n+1} \subset B_n$, alors $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ est aussi un événement, « limite » des B_n.*

Exemple. Sur les exemples qui suivent, identifier les suites monotones d'événements.

1. A_n : « Pile est tombé lors de l'un des n premiers lancers »
2. B_n : « sur les n premières colles, j'ai eu au moins un 13 »
3. C_n : « sur les n premières colles, j'ai toujours eu au moins 13 »

Théorème de la continuité croissante.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'événements. Alors :

$$P(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Théorème de la continuité décroissante.

Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'événements. Alors :

$$P(B_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$$

Remarque. *Il arrive que l'on s'intéresse à une réunion non croissante (resp. à une intersection non décroissante) d'événements. On applique dans ce cas les théorèmes précédents à la suite des unions partielles (resp. intersections partielles) qui est croissante (resp. décroissante) :*

Corollaire. Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements. Alors :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{n} C_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n\right) \quad \text{et} \quad P\left(\bigcap_{k=0}^{n} C_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} C_n\right)$$

Exemple. On lance une pièce équilibrée une infinité de fois, et on s'intéresse à l'événement :

$$A = \text{« obtenir Pile à tous les lancers »}$$

On introduit la suite des événements :

$$A_n = \text{« obtenir Pile au lancer } n \text{ »}$$

Déterminer la probabilité de l'événement A.

2.3 Négligeabilité

Définition. On dit qu'un événement A est **négligeable** lorsque $P(A) = 0$.

Remarque. *L'événement impossible est négligeable, mais un événement négligeable n'est, en général, pas impossible.*

Définition. On dit qu'un événement A est **presque sûr** lorsque $P(A) = 1$.

Remarque. *Cela équivaut à $\overline{A}$ négligeable.*

L'événement certain est presque sûr, mais un événement presque sûr n'est, en général, pas l'événement certain.

Définition. Une famille au plus dénombrable $(A_n)_{n\in N}$ d'événements est un **système quasi-complet** si les A_n sont deux à deux disjoints et leur union presque sûre, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{n\in N} P(A_n) = 1$.

3 Conditionnement

3.1 Probabilités conditionnelles

Définition. Soit B un événement tel que $P(B) > 0$.
Pour tout événement $A \in \mathscr{A}$, on définit la **probabilité conditionnelle de A sachant B** par :

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Proposition. P_B est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

3.2 Probabilités composées

Probabilités composées.

Pour deux événements A et B tels que $P(B) > 0$, on a :

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B)$$

Plus généralement, si $A_1, \ldots, A_m$ sont des événements tels que $P\left(\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i\right) > 0$, on a :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right) &= P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1 \cap A_2}(A_3)\, \ldots\, P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{m-1}}(A_m) \\ &= P(A_m \mid A_{m-1} \cap \cdots \cap A_2 \cap A_1) \ldots\, P(A_3 \mid A_2 \cap A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_1) \end{aligned}$$

Exemple. Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire successivement et sans remise n boules de cette urne. Déterminer la probabilité qu'au moins une boule rouge figure dans ce tirage.

3.3 Probabilités totales

Probabilités totales.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet ou quasi-complet d'événements, avec I fini ou dénombrable.
Pour tout événement B :

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) \\ &= \sum_{i \in I} P(B|A_i)P(A_i) \end{aligned}$$

Remarque.

- *On adopte la convention (raisonnable) que $P(B|A_i)P(A_i) = 0$ lorsque $P(A_i) = 0$.*
- *On précisera toujours le système complet ou quasi-complet d'événements utilisé pour appliquer ce théorème.*
- *Dans le cas fréquent du système complet d'événements $\{A, \overline{A}\}$, la formule s'écrit :*

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})$$

Exemple. On dispose de six urnes numérotées de 1 à 6. L'urne numéro k comporte k boules blanches et une boule rouge. Un joueur lance un dé équilibré, puis choisit une boule dans l'urne correspondant au résultat du dé. Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche.

3.4 Formule de Bayes

Formule de Bayes.

Soit A et B deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})} \qquad \text{si de plus } P(\overline{A}) \neq 0 \end{aligned}$$

Plus généralement, si $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements, avec I au plus dénombrable, alors pour tout événement B de probabilité non nulle et tout i :

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum\limits_{k\in I} P(B|A_k)P(A_k)}$$

en adoptant la convention $P(B|A_i)P(A_i) = 0$ si $P(A_i) = 0$.

Exemple.

1. On dispose d'un test de dépistage d'une maladie. En principe, celui-ci est positif si le patient est malade, mais le test n'est pas fiable à 100 %.
   Plus précisément, si le patient est malade alors le test est positif 99.9 fois sur 100.
   Mais 4 fois sur 1000 il est positif sur une personne non malade.
   On sait qu'environ 2 ‰ de la population est atteinte de la maladie.
   Quelle est la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif ?

2. On dispose d'un second test de dépistage de la même maladie, moins bon que le premier. Mais on le teste maintenant sur la population qui s'est révelée positive au premier test.
   Si la personne est malade le test B est positif 97 fois sur 100. Mais 8 fois sur 1000 il est positif sur une personne non malade. Environ 1/3 de la population testée est atteinte de la maladie.
   Quelle est la probabilité qu'une personne testée soit malade sachant que le test B est positif ?

4 Indépendance

4.1 Indépendance de deux événements

Définition. Deux événements A et B sont dits **indépendants** si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

Remarque. *Dans le cas où $P(B) > 0$, cela revient à dire $P(A \mid B) = P(A)$, c'est-à-dire que la réalisation de B n'influe pas sur la réalisation de A.*
Deux événements disjoints ne sont en général pas indépendants : la réalisation de l'un interdit la réalisation de l'autre.

Proposition. Si A et B sont indépendants, alors :

- A et $\overline{B}$ sont indépendants
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

Remarque. *Le résultat s'étend au cas de n événements.*

4.2 Indépendance d'une famille finie d'événements

Définition. Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ une famille finie d'événements.

- Les événements sont **deux à deux indépendants** si et seulement si, pour tout $i, j \in \{1, \dots, m\}$:
$$i \neq j \implies P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\, P(A_j)$$
- Les événements sont **indépendants** si et seulement si, pour toute partie (finie) $J \subset \{1, \dots, m\}$ non vide,
$$P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i)$$

Remarque. *On utilise parfois l'expression « mutuellement indépendants » pour désigner l'indépendance. Des événements peuvent être deux à deux indépendants sans être indépendants.*

Exemple. On lance deux dés discernables, et on considère les événements :

$$A = \text{« le premier dé donne un résultat pair »}$$
$$B = \text{« le second dé donne un résultat pair »}$$
$$C = \text{« la somme des résultats des deux dés est paire »}$$

Les événements A, B et C sont deux à deux indépendants mais ne sont pas (mutuellement) indépendants.

5 Annexes et compléments de cours

5.1 Annexe : ensemble fini, ensemble dénombrable

$\{1, 2, 4, 8\}$, $\{0, 3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$ et $]0, 1[$ sont trois ensembles pour lesquels on veut formaliser qu'ils n'ont pas la même « taille ».

Définition.

- Un ensemble est dit **fini** s'il peut être mis en bijection avec un ensemble de la forme $[\![1, n]\!]$.
- Un ensemble est dit **dénombrable** s'il peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$.

Remarque. *Cela signifie que l'on peut décrire l'ensemble en extension sous la forme $\{x_i,\ i \in [\![1, n]\!]\}$ (resp. $\{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$) avec des x_i distincts : on peut **numéroter** les éléments.*

Remarque. *Un ensemble est au plus dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il peut être décrit en extension sous la forme $\{x_i,\ i \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$ avec des x_i distincts.*

Exemple. $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

Proposition.

- Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.
- Le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- L'union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Exemple. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{R}$ ne sont pas dénombrables.

5.2 Complément : un exemple d'ensemble non dénombrable

Résultat.
L'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Preuve. Raisonnons par l'absurde, et appliquons un procédé, dit diagonal, dû à Cantor. On suppose donc que $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{u^i = (u_n^i)_{n\in\mathbb{N}},\ i \in \mathbb{N}\}$ est décrit en extension.

$$\begin{aligned} u^0 &= u_0^0, u_1^0, u_2^0, u_3^0, \dots \\ u^1 &= u_0^1, u_1^1, u_2^1, u_3^1, \dots \\ u^2 &= u_0^2, u_1^2, u_2^2, u_3^2, \dots \\ u^3 &= u_0^3, u_1^3, u_2^3, u_3^3, \dots \end{aligned}$$

On considère alors la suite

$$v = v_0, v_1, v_2, v_3, \dots$$

où l'on a posé :

$$\forall n,\ v_n = 1 - u_n^n$$

La suite $(v_n)_n$ est une suite d'éléments de $\{0,1\}$: elle est dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
Elle diffère de chaque suite u^i car $v_i \neq u_i^i$: elle n'est aucune des u^i.
Ceci contredit l'hypothèse $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{u^i,\ i \in \mathbb{N}\}$. □

5.3 Annexe : la tribu, c'est l'ensemble des événements

Quand Ω est fini, $\mathcal{P}(\Omega)$ est aussi fini et pour définir une probabilité, il suffit de définir la probabilité des singletons, puis d'appliquer la σ-additivité pour connaître la probabilité de n'importe quelle partie de Ω.
Quand Ω est dénombrable, on peut procéder de même car tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est inclus dans Ω, et est donc au plus dénombrable. Par σ-additivité :

$$P(A) = \sum_{x\in A} P(\{x\})$$

Quand Ω est infini non dénombrable, il est compliqué de définir une probabilité intéressante sur $\mathcal{P}(\Omega)$.
Il faut donc accepter de ne définir la probabilité que de certaines parties de Ω : ce sont seulement celles-ci que l'on appelle « événement ». Et on appelle « tribu » l'ensemble des événements.
Définition. Soit Ω un ensemble (l'univers). Une **tribu** est un ensemble $\mathscr{A}$ de parties de Ω tel que :

- $\Omega \in \mathscr{A}$;
- $\mathscr{A}$ est stable par union au plus dénombrable ;
- $\mathscr{A}$ est stable par passage au complémentaire.

Remarque. *On trouve aussi l'appellation σ-**algèbre**. On parle d'**espace probabilisable** lorsque l'on parle de $(\Omega, \mathscr{A})$.*
Exemple. Lorsque $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, on dit que $\mathscr{A}$ est la tribu complète.
Proposition. Une tribu $\mathscr{A}$ satisfait aussi :

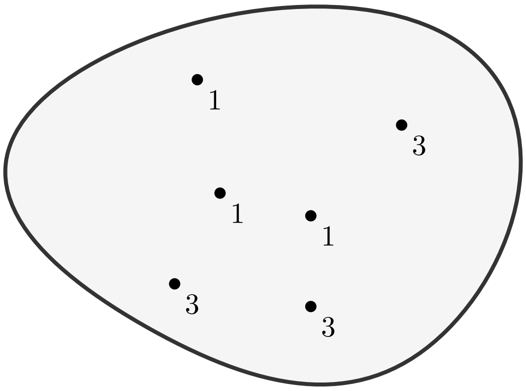
- $\varnothing \in \mathscr{A}$;
- $\mathscr{A}$ est stable par intersection au plus dénombrable.

La plupart du temps, Ω n'est pas explicité et encore moins $\mathscr{A}$. En pratique, la modélisation du problème nous fournit une probabilité qui est définie sur les parties (événements) dont on a besoin. Et il est même difficile – et complètement hors programme – de construire une partie qui n'est pas dans $\mathscr{A}$.
Exemple. On s'intéresse au pile-face infini avec une pièce équilibrée. On définit F_3 l'ensemble de toutes les issues qui ont donné « face » lors du troisième lancer. C'est un événement.

5.4 Annexe : libérons les sommes !

5.4.1 Somme finie

Exemple. On considère la famille de nombres décrit par :



Qu'est-ce que la somme de cette famille de nombres ?

5.4.2 Somme d'une série de réels positifs

Exemple. On considère la famille de réels positifs $\left(\dfrac{1}{n^4}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indexée par $\mathbb{N}^*$. Qu'est-ce que la somme de cette famille ?

Et la somme de la famille $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

5.4.3 Somme d'une famille dénombrable de réels positifs

Exemple. On considère la famille de réels positifs $\left(\dfrac{1}{(p+q)^4}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ indexée par $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$. Qu'est-ce que la somme de cette famille ?

Résultat. On admet que l'on sait associer à toute famille au plus dénombrable $(x_i)_{i\in I}$ de réels positifs sa **somme** $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i \in [0,+\infty]$ et que, pour tout découpage en paquets $I = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ de I, on a :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} x_i\right)$$

La famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite **sommable** lorsque $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i < +\infty$.

En pratique. Dans le cas d'une famille de réels positifs, on peut découper, calculer, majorer les sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité. Bref, on calcule « naturellement » avec les sommes de familles de réels positifs.

Exemple. Pour $s > 1$, on note $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$. Montrer que :

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n^{s+1}}\right)$$

5.4.4 Somme d'une séries de réels quelconques

Exemple. On considère la famille de réels $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indexée par $\mathbb{N}^*$. Qu'est-ce que la somme de cette famille ?

5.4.5 Somme d'une famille dénombrable de réels quelconques ou de complexes

Définition. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable de nombres réels ou complexes est dite **sommable** si et seulement si $(|x_i|)_{i\in I}$ l'est.

Proposition. Si $|x_i| \leqslant y_i$ pour tout $i \in I$, la sommabilité de $(y_i)_{i\in I}$ implique celle de $(x_i)_{i\in I}$.

En pratique. En cas de sommabilité, les sommes se manipulent « naturellement » grâce aux propriétés suivantes : croissance, linéarité, sommation par paquets.

Cas des sommes doubles. Dans le cas particulier des familles indexées par $\mathbb{N}^2$, le découpage par paquets « verticaux » ou « horizontaux » s'appelle le *théorème de Fubini*, et l'on retrouve le *produit de Cauchy* étudié avec les séries numériques.

6 Exercices et résultats classiques à connaître

6.1 Applications directes du cours

301.1

Vous jouez à Pile ou Face dans un club de jeu dont environ un membre sur trois est un tricheur. Votre adversaire parie sur Pile, lance la pièce et obtient Pile. Quelle est la probabilité qu'il soit un tricheur ?

301.2

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire successivement des boules de cette urne. À chaque boule tirée, on note la couleur de celle-ci, et on la remet dans l'urne accompagnée d'une boule de la même couleur. Montrer qu'il est presque sûr que la boule rouge initiale sera tirée.

301.3

Une urne contient une boule rouge. Un joueur lance un dé équilibré. S'il obtient ⚅, il tire une boule dans l'urne. Sinon, il rajoute une boule blanche dans l'urne et répète la manipulation. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?

6.2 Apparition d'un motif dans une suite infinie de lancers d'une pièce

301.4

On effectue une suite de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par p_k la probabilité qu'au cours des k premiers lancers, le résultat Pile n'ait pas été obtenu deux fois de suite.

(a) Calculer p_1, p_2, p_3. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 3$, on a

$$p_k = \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{4}p_{k-2}$$

Dans la suite, on pose $p_0 = 1$. Est-ce cohérent ?

(b) Donner l'expression de p_k en fonction de k.

(c) En déduire la convergence et la limite de la suite (p_k). Interpréter du résultat obtenu.

6.3 Chaîne de Markov et matrice stochastique

301.5

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A,B et C.
A l'instant t=0, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On note A_n l'événement « l'animal est en A après son n-ième trajet ».
On note B_n l'événement « l'animal est en B après son n-ième trajet ».
On note C_n l'événement « l'animal est en C après son n-ième trajet ».
On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

(a) a1. Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
a2. Exprimer de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

(b) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

b1. Justifier, sans calculs, que la matrice A est diagonalisable.
b2. Diagonaliser A.

(c) Montrer comment les résultats de la question 2 peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

6.4 Apparition d'une suite arithmético-géométrique

301.6

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche ».
On pose également $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = P(B_n)$.

(a) Calculer p_1.

(b) Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.

(c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

6.5 Lemme de Borel-Cantelli

301.7

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements aléatoires. On s'intéresse à :

$$\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant N} A_n$$

(a) Pourquoi s'agit-il d'un événement ?

(b) Comment interpréter $\omega \in \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant N} A_n$?

(c) Montrer que si $\sum_{n\geqslant 0} P(A_n) < +\infty$, alors $P\left(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant N} A_n\right) = 0$.

(d) *Question plus difficile, non exigible en colle.*

Montrer que si $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} P(A_n) = +\infty$, et si les A_n sont indépendants, alors $P\left(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant N} A_n\right) = 1$.

(e) Comment interpréter le résultat de la question précédente ?

Exercices de mathématiques

301.8

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Écrire, avec les opérations ensemblistes ($\cup$, $\cap$ et complémentaire) les événements suivants :

(a) L'un au moins des événements A, B ou C est réalisé

(b) L'un et seulement l'un des événements A et B est réalisé

(c) Les deux événements A et B sont réalisés, et C ne l'est pas

(d) Tous les événements A_n, $n \geqslant 1$ sont réalisés

(e) L'un au moins des événements A_n, $n \geqslant 1$ est réalisé

(f) Une infinité d'événements parmi les A_n, $n \geqslant 1$ est réalisée

(g) Seul un nombre fini des événements A_n, $n \geqslant 1$ est réalisé

(h) Une infinité d'événements parmi les A_n, $n \geqslant 1$ n'est pas réalisée

(i) Tous les événements parmi les A_n, $n \geqslant 1$ sont réalisés à partir d'un certain rang

301.9

Quelle est la probabilité pour que la séquence « PFFP » apparaisse lors d'une série infinie de lancers d'une pièce équilibrée ?
On pourra introduire les événements F_i (resp. P_i) « obtenir face (resp.pile) » lors du $i^{\text{ème}}$ lancer, et $B_i = P_{i-3} \cap F_{i-2} \cap F_{i-1} \cap P_i$, $B'_i = B_{4i}$ et $U_n = \displaystyle\bigcup_{i=4}^{4n} B_i$ et $U'_n = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{B_{4i}}_{B'_i}$.

301.10

Soit P une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que $P(\{n\}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Que peut-on dire de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(\{k / k \geqslant n\})$?

301.11

Deux archers tirent chacun leur tour sur une cible. Le premier qui touche a gagné. Le joueur qui commence a la probabilité p_1 de toucher à chaque tour et le second la probabilité p_2 (avec $p_1, p_2 > 0$)

(a) Quelle est la probabilité que le premier joueur gagne ?

(b) Montrer qu'il est quasi-certain que le jeu se termine.

(c) Pour quelle(s) valeur(s) de p_1 existe-t-il une valeur de p_2 pour laquelle le jeu est équitable ?

301.12

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

(a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

(c) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

301.13

On cherche un objet dans un meuble qui a 8 tiroirs. La probabilité qu'il se trouve dans le meuble est p. On ouvre successivement 7 tiroirs différents sans le trouver. Quelle est la probabilité qu'il soit dans le dernier tiroir ?

301.14

On considère une société dont chaque individu peut avoir les caractéristiques suivantes :

- il peut être bleu (avec probabilité p) ou rouge $(1-p)$;
- il peut être riche (avec probabilité q) ou pauvre $(1-q)$.

On sait de plus que 70% des bleus sont riches et 70% des riches sont bleus. La richesse est-elle équitablement répartie entre les bleus et les rouges ?

301.15

On dispose d'un trousseau de n clés indifférentiables pour ouvrir une serrure.

(a) L'expérience a lieu dans le noir et, à chaque essai, on utilise une clé choisie au hasard. Quelle est, pour tout entier non nul p, la probabilité d'ouvrir la serrure au p-ième essai ?

(b) Le lendemain, on s'est procuré une lampe de poche et on essaie successivement toutes les clés. Quelle est maintenant la probabilité d'ouvrir la serrure au p-ième essai de cette nouvelle série ?

301.16

On lance n pièces de monnaie truquées, la probabilité que la k-ième pièce amène « Pile » valant $\dfrac{1}{2k+1}$. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair de « Piles » ?

301.17

On lance une pièce avec la probabilité p de faire « Pile ». On note A_n l'événement « on obtient pour la première fois deux piles consécutifs lors du $n^{\text{ème}}$ lancer » et l'on désire calculer sa probabilité a_n.

(a) Déterminer a_1, a_2 et a_3.

(b) Exprimer a_{n+2} en fonction de a_n et a_{n+1} pour $n \geqslant 1$.

(c) Justifier qu'il est quasi-certain d'obtenir deux piles consécutifs.

(d) Déterminer le nombre d'essais moyen pour obtenir deux piles consécutifs.

301.18

On jette deux dés équilibrés. On appelle A_1 l'événement : « le résultat du premier dé est impair », A_2 l'événement : « le résultat du second dé est impair » et A_3 l'événement : « la somme des 2 résultats est impaire ».

(a) A_1, A_2 et A_3 sont-ils indépendants deux à deux ?

(b) A_1, A_2 et A_3 sont-ils indépendants ?

Petits problèmes d'entrainement

✍ **301.19**

La joueuse Fafa joue contre le joueur Pif avec une pièce équilibrée. On lance cette pièce. Si la séquence « FF » est observée avant la séquence « PF », alors la joueuse Fafa est vainqueur. Si c'est la séquence « PF », qui est observée en premier, alors Pif est vainqueur.

(a) Justifier que la probabilité que personne ne gagne est nulle.

(b) En considérant les résultats des deux premiers lancers, montrer que Pif a la plus grande probabilité de l'emporter.

✍ **301.20**

Les Anglais et les Américains orthographient le mot *rigueur*, respectivement, *rigour* et *rigor*. Un homme ayant pris une chambre dans un hôtel parisien a écrit ce mot sur un bout de papier. Une lettre est prise au hasard dans ce mot, c'est une voyelle. Or 40 % des anglophones de l'hôtel sont des Anglais et les 60 % restants sont Américains. Quelle est la probabilité que l'auteur du mot soit anglais ?

301.21

On appelle nombre algébrique, tout nombre complexe x solution d'une équation de la forme

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad \text{où } a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \text{ et } a_n \neq 0$$

On appelle degré d'un nombre algébrique x, le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que x soit solution d'une équation comme ci-dessus.

(a) Quels sont les nombres algébriques de degré 1 ?

(b) Donner un exemple de nombre algébrique de degré 2.

(c) Montrer que l'ensemble des nombres algébriques de degré n est dénombrable.

(d) L'ensemble de tous les nombres algébriques est-il dénombrable ?

301.22

Trois parties équitables de Pile ou Face, indépendantes, se déroulent simultanément. Montrer que, presque sûrement, il y a au plus un nombre fini d'instants auxquels on a égalité simultanément dans les trois parties.

301.23

Jean et Pierre lancent deux dés[3] équilibrés à tour de rôle, et Jean commence.
Jean est dit gagnant s'il obtient lors des lancers une somme des dés égale à six avant que Pierre n'obtienne une somme des dés égale à sept, auquel cas Pierre sera gagnant.
Anselme Lanturlu a écrit le code suivant :

```python
import random as rd

def simulation():
    fin_jeu = False
    while not fin_jeu:
        De_1 = rd.randint(1,6)
        De_2 = rd.randint(1,6)
        if De_1 + De_2 == 6 :
            fin_jeu = True
            y = "J"
        else :
            De_1 = rd.randint(1,6)
            De_2 = rd.randint(1,6)
            if De_1 + De_2 == 7 :
                fin_jeu = True
                y = "P"
    return y

for k in range(5):
    nbJ = sum([1 for n in range(100000) if simulation() == "J"])
    print(nbJ)
# 49109
# 49365
# 49214
# 49119
# 49253
```

(a) Quelle conjecture formuler ?

(b) Le démontrer.

301.24

On effectue une suite de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par p_k la probabilité qu'au cours des k premiers lancers, le résultat Pile n'ait pas été obtenu trois fois de suite.

(a) Calculer p_1, p_2, p_3. Dans la suite, on pose $p_0 = 1$. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 3$, on a

$$p_k = \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{4}p_{k-2} + \frac{1}{8}p_{k-3}$$

[3] Petits, les dés

(b) Montrer que la suite (p_k) est une combinaison linéaire de trois suites géométriques.

(c) En déduire la convergence et la limite de la suite (p_k). Donner une interprétation du résultat obtenu.

301.25

Soit $a \in]1, +\infty[$. On définit le réel $\zeta(a)$ par $\zeta(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$.

(a) Démontrer que l'on peut définir une probabilité P sur $\mathbb{N}^*$ à l'aide des réels

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = \frac{1}{\zeta(a)k^a}$$

On considère désormais l'espace probabilisé $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*), P)$.

(b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $A_m = m\mathbb{N}^* = \{km,\ k \in \mathbb{N}^*\}$. Calculer $P(A_m)$.

(c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur deux entiers i et j pour que A_i et A_j soient indépendants.

(d) Application : on note p_i le i-ième nombre premier ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5\ldots$) et C_n l'ensemble des entiers divisibles par aucun des nombres premiers p_i, pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

d1. Calculer $P(C_n)$.

d2. Déterminer $\bigcap_{n\geqslant 1} C_n$.

d3. En déduire l'égalité :

$$\forall a > 1,\ \zeta(a) = \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^a}\right)^{-1}$$

301.26

En cas de migraine, trois personnes sur cinq prennent du paracétamol et deux sur cinq prennent de l'ibuprofène. Avec le paracétamol, 75% des patients sont soulagés. Avec l'ibuprofène, 90% des patients sont soulagés (mais il y a plus d'effets secondaires).

(a) Quel est le taux global de personnes soulagées ?

(b) Quelle est la probabilité pour une personne d'avoir pris du paracétamol sachant qu'il est soulagé ?

301.27

On lance une infinité de fois une pièce amenant Pile avec une probabilité p et on considère les assertions suivantes :

A_n : « sur les $2n$ premiers lancers, il est apparu autant de Pile que de Face »

B_n : « sur les $2n$ premiers lancers, il est apparu pour la première fois autant de Pile que de Face »

C : « sur l'ensemble des lancers, Pile et Face sont arrivés à égalité au moins une fois »

(a) Calculer $P(A_n)$ et $P(B_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Calculer $P(C)$.

301.28

Mon fils est fan du dernier film d'animation, et voudrait obtenir une figurine de son héros. L'équipe marketing du film a placé, équitablement réparties dans des paquets de céréales, les figurines de cinq personnages (une figurine par paquet). Combien dois-je acheter de paquets de céréales pour que la probabilité d'avoir la figurine attendue dépasse 80% ? 90% ?