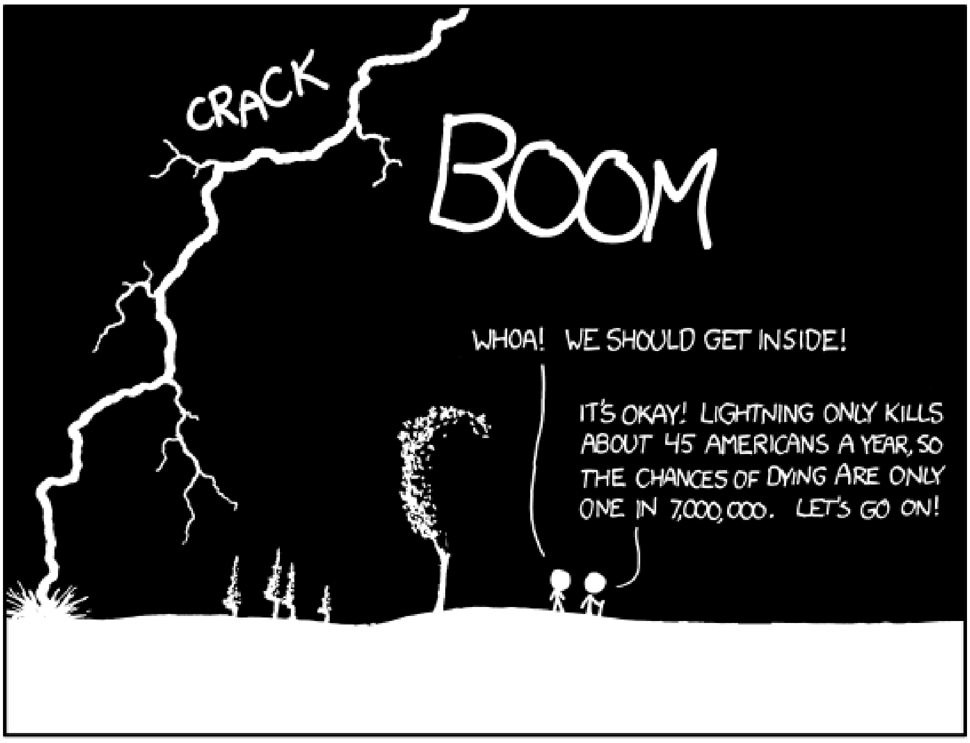
Variables aléatoires discrètes, le début

Cours 3

Exercices 14



THE ANNUAL DEATH RATE AMONG PEOPLE WHO KNOW THAT STATISTIC IS ONE IN SIX.

https://xkcd.com/795

Lu dans le programme officiel

• • •

Dans ce chapitre, sauf mention contraire, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ désigne un espace probabilisé.

1 Qu'importe l'épreuve, pourvu qu'on ait le résultat !

1.1 Définition

Définition. Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Une **variable aléatoire discrète** X est une application :

$$X \,:\, \Omega \to X(\Omega) \subset E$$

telle que :

- l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est au plus dénombrable ;
- pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $(X = x)$ est un événement.

On appelle **support de la v.a.** l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X.

Remarque. *$(X = x)$ est l'ensemble $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\}$, image réciproque de $\{x\}$ par l'application. Dire que c'est un événement, c'est dire qu'il est dans la tribu $\mathscr{A}$.*

Remarque. *Travailler avec des variables aléatoires, c'est regrouper dans un même événement les épreuves en fonction de leur image par X.*

Remarque. *Les v.a. étudiées dans le cadre de notre programme sont toutes discrètes. Elles sont souvent à valeurs numériques, voire entières, mais on manipule aussi des v.a. à valeurs vectorielles quand on manipule des couples ou des n-uplets de v.a.*

Définition.

- Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on parle de **v.a. réelle discrète**.
- Lorsque $E = \mathbb{R}^2$, on parle de **couple de v.a. réelles**.

Remarque. *En pratique, on n'explicite pas Ω ni $\mathscr{A}$. Mais la donnée d'une v.a. fournit toute une série d'événements : les $(X = x)$. En combinant ces événements par unions et intersections au plus dénombrables, et en passant au contraire, on connaît beaucoup d'éléments de la tribu.*

Définition. Soit A un événement. La **fonction indicatrice** de A est :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_A \,:\, \Omega & \to & \{0, 1\} \\ \omega & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases} \end{array}$$

Proposition. La fonction indicatrice d'un événement est une variable aléatoire discrète.

1.2 Loi d'une v.a.

Définition. Donner la loi d'une v.a., c'est donner :

- $X(\Omega)$;
- pour chaque $x \in X(\Omega)$, la valeur de $P(X = x)$.

On note $X \sim Y$ lorsque les deux v.a. X et Y suivent la même loi.

Remarque. *On explique en page 11 pourquoi on définit ainsi une nouvelle probabilité.*

Exemple. On s'intéresse au jeu du Pile ou Face infini, et on note X la variable aléatoire donnant le rang du premier lancer qui donne Pile. On suppose qu'à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est $p \in]0,1[$, et celle d'obtenir Face est $q = 1 - p$.

1. Déterminer la loi de X, appelée **loi géométrique de paramètre** p.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P(X \leqslant n)$ et $P(X > n)$.

Méthode. Si l'on définit une v.a. X, que l'on donne pour $x \in X(\Omega)$ la valeur de $P(X = x)$, montrer que X suit une loi de probabilité revient à vérifier que :

- $\forall x \in X(\Omega),\ P(X = x) \geqslant 0$;

- $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$.

Exemple. Soit X un v.a. sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans $[\![2, +\infty[\![$, et telle que :

$$\forall n \geqslant 2,\ P(X = n) = \zeta(n) - 1$$

Montrer que X suit une loi de probabilité.

1.3 Fonction d'une variable aléatoire

Proposition. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans E et $f\ :\ E \to F$ une fonction définie sur $X(\Omega)$. Alors :

$$f(X)\ :\ \begin{array}{rcl} \Omega & \to & F \\ \omega & \mapsto & f(X(\omega)) \end{array}$$

est une variable aléatoire discrète.

Remarque. *La notation peut être trompeuse. Une v.a. étant une fonction, il s'agit bien de la composée de fonctions $f \circ X$.*

Exemple. On considère X v.a. telle que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et :

$$P(X = -1) = P(X = 0) = \frac{1}{4} \text{ et } P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

Déterminer la loi de $Y = X^2 + 1$.

Proposition. Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

2 Lois usuelles

Conseil. *Il n'est pas inutile de ficher les lois usuelles.*

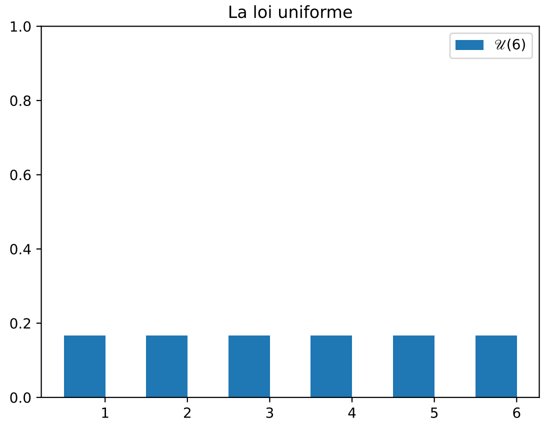
2.1 Loi uniforme

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[\![1, n]\!]$ lorsque :

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{n}$$

On note alors $X \sim \mathscr{U}([\![1, n]\!])$.

Interprétation. *C'est la loi du choix « au hasard » d'un élément dans un ensemble à n éléments.*



2.2 Loi de Bernoulli

Définition. Soit $p \in]0,1[$. Une variable aléatoire X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p lorsque :

$$X(\Omega) = \{0,1\} \quad \text{et} \quad P(X=1) = p,\ P(X=0) = 1-p$$

On note alors $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Exemple. Toute expérience à deux issues, comme le jeu de Pile ou Face, est naturellement modélisée par une v.a. suivant une loi de Bernoulli.

Exemple. Si A est un événement, sa fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$:

$$\mathbb{1}_A \sim \mathscr{B}(P(A))$$

2.3 Loi binomiale

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Une variable aléatoire X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p lorsque :

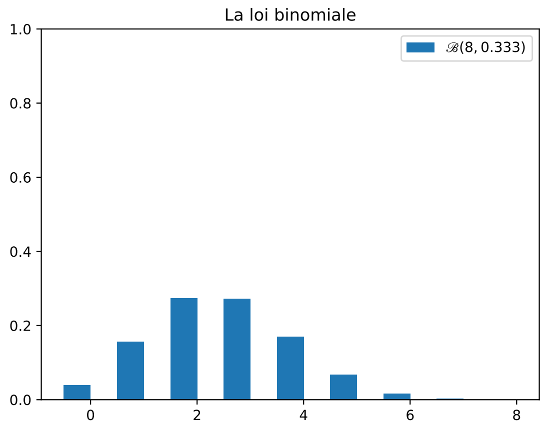
$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On note alors $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

Interprétation. *C'est la loi du nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes, de même paramètre p.*

Proposition. Si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre p, alors :

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$



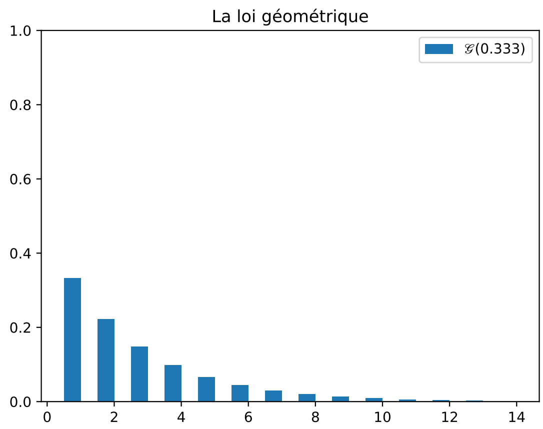
2.4 Loi géométrique

Définition. Soit $p \in]0, 1[$. Une variable aléatoire X suit une **loi géométrique** de paramètre p lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$$

On note alors $X \sim \mathscr{G}(p)$.

Interprétation. *C'est la loi du numéro du premier succès dans la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de même paramètre p.*



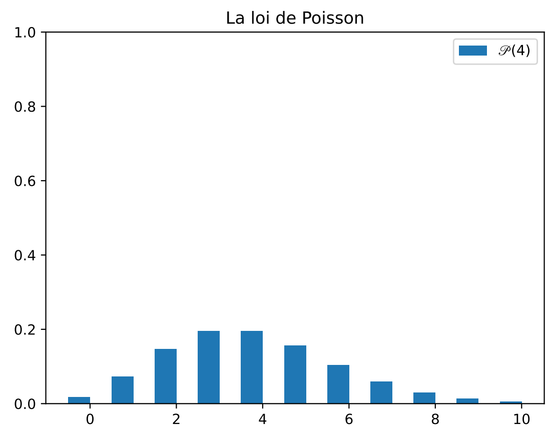
2.5 Loi de Poisson

Définition. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Une variable aléatoire X suit une **loi de Poisson** de paramètre λ lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

On note alors $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

Interprétation. *On l'appelle la loi « des événements rares » : Lorsqu'un événement rare arrive en moyenne λ fois sur une période T, c'est la loi du nombre de fois où cet événement se produit sur une période donnée.*



3 Couples de variables aléatoires

3.1 Loi conjointe, lois marginales

Remarque. *On a vu que si X et Y sont deux v.a. discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, alors $Z = (X, Y)$ est aussi une v.a. discrète. On s'intéresse aux liens entre les lois de X et Y d'une part, et de Z d'autre part.*
On a directement $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Définition. Si X et Y sont deux v.a. à valeurs dans $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ respectivement, leur **loi conjointe** est la loi du couple (X, Y), au sens usuel :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ P((X, Y) = (x, y)) = P((X = x) \cap (Y = y))$$

que l'on note plus simplement $P(X = x, Y = y)$.
Les **lois marginales** du couple (X, Y) sont celles de X et de Y.

Exemple.

- Un prof pose une question à deux étudiants, Antoine et Baptiste, qui n'ont pas appris leur cours. Leur réponse respective est une variable aléatoire notée A (resp. B), qui suit une loi de Bernoulli $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
- Dans le même contexte, Antoine a une confiance aveugle en Baptiste, et copie sa réponse (même si elle répond toujours au hasard). A et B suivent encore $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
- Dans le même contexte, Baptiste se méfie d'Antoine, et copie sur sa copie pour répondre l'opposé (tandis que lui répond toujours au hasard). A et B suivent encore $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Dans les trois situations précédentes, le couple (A, B) ne suit pas du tout la même loi :

$A \backslash B$	0	1	P_A
0	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
P_B	1/2	1/2	1

$A \backslash B$	0	1	P_A
0	1/2	0	1/2
1	0	1/2	1/2
P_B	1/2	1/2	1

$A \backslash B$	0	1	P_A
0	0	1/2	1/2
1	1/2	0	1/2
P_B	1/2	1/2	1

Remarque. *Il apparaît bien que connaître les lois marginales n'est pas suffisant pour connaître la loi conjointe.*

3.2 Détermination pratique des lois marginales

Remarque. *On peut visualiser loi conjointe et lois marginales dans un tableau (fini ou dénombrable), avec $X(\Omega) = \{x_i,\, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j,\, j \in J\}$ et en notant $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$:*

$X \backslash Y$	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	Loi de X
x_1	p_{11}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$P(X = x_1) = \sum_{j \in J} p_{1j}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$P(X = x_i) = \sum_{j \in J} p_{ij}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
Loi de Y	$P(Y = y_1) = \sum_{i \in I} p_{i1}$	$\cdots$	$P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} p_{ij}$	$\cdots$	1

Proposition. On obtient les lois marginales[1] par applications des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Y = y)_{y \in Y(\Omega)}$:

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x | Y = y) P(Y = y) \end{aligned}$$

et de même pour $P(Y = y)$.

4 Indépendance

4.1 Variables aléatoires indépendantes

Définition. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes. On dit que X et Y sont **indépendantes** et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$ si et seulement si, pour tout $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$, les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants, c'est-à-dire :

$$\forall x \in X(\Omega),\, y \in Y(\Omega),\; P(X = x, Y = y) = P(X = x)\, P(Y = y)$$

Remarque. *De façon équivalente, cela signifie que la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par :*

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)\, P(Y = y)$$

Proposition. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
Alors pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, on a :

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$$

Définition. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes. On dit qu'elles sont **indépendantes** si et seulement si pour tout $x_1 \in X_1(\Omega), \ldots, x_n \in X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 = x_1), \ldots, (X_n = x_n)$ sont indépendants, c'est-à-dire :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

On peut généraliser la propriété vue pour le cas de deux variables aléatoires discrètes indépendantes :

[1] Elles se lisent dans les marges du tableau précédent

Proposition. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes (mutuellement) indépendantes. Soit $A_1 \subset X_1(\Omega), \dots, A_n \subset X_n(\Omega)$. On a :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \in A_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i)$$

Définition. On appelle **variables i.i.d.** des variables **indépendantes** et **identiquement distribuées**, c'est-à-dire qui suivent toutes la même loi.
Si ces variables forment une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'indépendance est l'indépendance des familles finies $(X_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

Exemple. Le jeu de pile ou face infini se modélise par une suite i.i.d. de variables de Bernoulli.

Théorème.

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
Alors, pour toutes fonctions f et g, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Lemme des coalitions.

Soit $X_1, \dots, X_n$ des v.a.d. indépendantes. Alors pour toutes fonctions f et g, $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Remarque. *Ce résultat s'étend au cas de plus deux coalitions.*

5 Exercices et résultats classiques à connaître

5.1 Max et Min de deux variables géométriques

302.1

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la loi géométrique de même paramètre p, avec $p \in]0,1[$.

(a) Déterminer les lois de $\operatorname{Max}(X,Y)$ et $\operatorname{Min}(X,Y)$.

(b) Que représentent $\operatorname{Min}(X,Y)$?

(c) Calculer la probabilité $P(X = Y)$.

5.2 Somme de deux variables géométriques

302.2

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
On suppose que celles-ci suivent une même loi géométrique de paramètre p.
Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

5.3 Une matrice de variables aléatoires discrètes

302.3

Soit X et Y deux v.a. indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q. Quelle est la probabilité que la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable ?

5.4 Loi obtenue par récurrence

302.4

Soit une urne contenant une boule blanche et une boule rouge. On dispose par ailleurs d'une réserve suffisante de boules blanches et rouges, et on répète n fois l'action suivante :
on tire une boule dans l'urne. Si cette boule est blanche (respectivement rouge), on la remet dans l'urne, et on rajoute une boule blanche (respectivement rouge) dans l'urne.
On désigne par X_n la variable aléatoire « nombre de boules blanches dans l'urne » après ces n tirages. Quelle est la loi de X_n ?
Indication : examiner les petites valeurs de n peut donner des idées.

5.5 Loi d'un couple, lois marginales

302.5

On considère un couple de v.a. (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, tel que, avec $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ P(X = p, Y = q) = \alpha \frac{p^q}{\mathrm{e}^{2p} q!}$$

(a) Quelle valeur donner à α pour que (X, Y) suive une loi de probabilité ?

(b) Déterminer la loi de X.

(c) Calculer $P(Y = 0)$, $P(Y = 1)$ et $P(Y = 2)$.

5.6 Utilisation de la loi conditionnelle

302.6

On désigne par N le nombre d'électrons émis par un élément chimique pendant une période T. On suppose que $N \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Chaque électron a une probabilité $p \in]0,1[$ d'avoir un effet biologique (on dit dans ce cas qu'il est efficace). On désigne par X le nombre d'électrons efficaces émis pendant une période T.

(a) Donner la loi de X conditionnée par $(N = j)$.

(b) Donner la loi conjointe de (X, N).

(c) Déterminer la loi de X, et la reconnaître.

6 Annexes et compléments de cours

6.1 Annexe : la loi d'une v.a. définit une probabilité

Résultat. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace proababilisée et $X : \Omega \to E$ une v.a. discrète. L'ensemble $X(\Omega)$ est un ensemble au plus dénombrable, que l'on munit de la tribu complète $\mathcal{P}\big(X(\Omega)\big)$. On définit :

$$\begin{array}{rccc} P_X : & \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & P(X \in A) \end{array}$$

C'est une probabilité sur l'espace probabilisé $\big(X(\Omega), \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big)\big)$. Comme la tribu est complète, elle est déterminée par la distribution de probabilité $(P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$.

Preuve. Montrons que P_X est une probabilité.

- Pour tout $A \in \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big)$, $P_X(A) = P(X \in A) \in [0,1]$.
- On a $P_X(X(\Omega)) = P(X \in X(\Omega)) = 1$ car l'événement $(X \in X(\Omega))$ est l'événement certain : pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \in X(\Omega)$.
- Soit $(A_n)_{n \in N}$ une famille au plus dénombrable de parties de $X(\Omega)$ deux à deux disjointes. Alors :

$$\begin{aligned} P_X\left(\bigcup_{n \in N} A_n\right) &= P\left(X \in \bigcup_{n \in N} A_n\right) \\ &= P\left(\bigcup_{n \in N} (X \in A_n)\right) \\ &\qquad \text{égalité justifiée ci-après} \\ &= \sum_{n \in N} P(X \in A_n) \\ &\qquad \text{car l'union est disjointe} \end{aligned}$$

Justifions $\left(X \in \bigcup_{n \in N} A_n\right) = \left(\bigcup_{n \in N} (X \in A_n)\right)$:

$$\begin{aligned} \omega \in \left(X \in \bigcup_{n \in N} A_n\right) &\iff X(\omega) \in \bigcup_{n \in N} A_n \\ &\iff \exists n \in N,\ X(\omega) \in A_n \\ &\iff \exists n \in N,\ \omega \in (X \in A_n) \\ &\iff \omega \in \bigcup_{n \in N} (X \in A_n) \end{aligned}$$

Expliquons maintenant qu'elle est déterminée par la distribution de probabilité $(P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si l'on connaît P_X, alors pour tout $x \in X(\Omega)$, $P(X=x) = P_X(\{x\})$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si l'on connaît $(P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$, alors pour tout $A \in \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big)$, on a :

$$\begin{aligned} P_X(A) &= P_X\left(\bigcup_{x \in A} \{x\}\right) \\ &= \sum_{x \in A} P_X(\{x\}) \\ &= \sum_{x \in A} P(X=x) \end{aligned}$$

□

6.2 Annexe : un couple de v.a. est une v.a.

Proposition. On note $X = (X_1, X_2)$. X est une v.a. si et seulement si X_1 et X_2 sont des v.a.

Preuve.

$\boxed{\Rightarrow}$ Commençons par comprendre les notations. On considère $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. X est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire que :

$$\begin{array}{rccc} X : & \Omega & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

où $X(\omega)$ est un couple de réel, que l'on écrit $(X_1(\omega), X_2(\omega))$. On définit donc deux applications :

$$X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$$

dont on veut montrer que ce sont des v.a.
On note $\begin{array}{rccc} \pi_1 : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1,x_2) & \mapsto & x_1 \end{array}$ la première fonction projection. On a $X_1 = \pi_1(X)$ est une v.a. en tant que fonction de v.a. Le résultat est identique pour X_2.

$\boxed{\Leftarrow}$ On considère maintenant deux v.a. X_1 et X_2 et on définit

$$\begin{array}{rccc} X : & \Omega & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \omega & \mapsto & (X_1(\omega), X_2(\omega)) \end{array}$$

On veut montrer que X est une v.a.

- $X(\Omega) \subset X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)$ est au plus dénombrable, comme partie d'un produit d'ensembles au plus dénombrables.
- Pour $(x_1, x_2) \in X(\Omega) \subset X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)$, on

a :

$$\begin{aligned}
\omega \in (X=(x_1,x_2)) &\iff X(\omega)=(x_1,x_2)\\
&\iff (X_1(\omega),X_2(\omega))=(x_1,x_2)\\
&\iff X_1(\omega)=x_1 \text{ et } X_2(\omega)=x_2\\
&\iff \omega\in(X_1=x_1) \text{ et } \omega\in(X_2=x_2)\\
&\iff \omega\in(X_1=x_1)\cap(X_2=x_2)
\end{aligned}$$

Ainsi $(X=(x_1,x_2))=(X_1=x_1)\cap(X_2=x_2)\in\mathscr{A}$ comme intersection de deux événements.

□

6.3 Annexe : la loi conditionnelle est une probabilité

Définition. Soit X une v.a. sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$ et A un événement non négligeable. On définit la **loi conditionnelle de X sachant l'événement A** par :

$$P_{X|A} : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big) & \to & [0,1] \\ B & \mapsto & P\big(X\in B|A\big) \end{array}$$

qui est déterminée par la distribution de probabilité :

$$\big(P(X=x|A)\big)_{x\in X(\Omega)}$$

Proposition. C'est une probabilité sur l'espace probabilisable $\Big(X(\Omega),\mathcal{P}\big(X(\Omega)\big)\Big)$.

Preuve.

- Pour tout $B\in\mathcal{P}\big(X(\Omega)\big)$:

$$\begin{aligned}
P_{X|A}(B) &= P\big(X\in B|A\big)\\
&= \frac{P\big((X\in B)\cap A\big)}{P(A)}\\
&\in [0,1] \quad \text{car } (X\in B)\cap A\subset A
\end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned}
P_{X|A}(\Omega) &= P\big(X\in\Omega|A\big)\\
&= \frac{P\big((X\in\Omega)\cap A\big)}{P(A)}\\
&= \frac{P(A)}{P(A)} \quad \text{car } (X\in\Omega) \text{ est certain}\\
&= 1
\end{aligned}$$

- Soit $(B_n)_{n\in N}$ une famille au plus dénombrable de parties de $X(\Omega)$ deux à deux disjointes. Alors :

$$\begin{aligned}
P_{X|A}\left(\bigcup_{n\in N}B_n\right) &= P\left(X\in\bigcup_{n\in N}B_n|A\right)\\
&= \frac{P\left(\left(X\in\bigcup_{n\in N}B_n\right)\cap A\right)}{P(A)}\\
&= \frac{P\left(X\in\bigcup_{n\in N}(B_n\cap A)\right)}{P(A)}\\
&= \frac{\sum_{n\in N}P\left(X\in B_n\cap A\right)}{P(A)}\\
&\qquad \text{car l'union est disjointe}\\
&= \sum_{n\in N}\frac{P\left(X\in B_n\cap A\right)}{P(A)}\\
&= \sum_{n\in N}P\left(X\in B_n|A\right)\\
&= \sum_{n\in N}P_{X|A}\left(B_n\right)
\end{aligned}$$

□

6.4 Complément : utiliser Python pour simuler une loi usuelle

Les fonctions utiles sont dans la bibliothèque `numpy.random`

```
import numpy.random as rd
```

On peut simuler la répétition d'épreuves $\omega\in\Omega$, et obtenir le tableau des valeurs $X(\omega)$ correspondantes, lorsque X suit une loi donnée. Par exemple, pour la loi uniforme sur $[\![1,7[\![$ qui modélise le lancer d'un dé honnête à six faces :

```
A = rd.randint(1, 7, 20)
print(A)
# [4 1 4 6 3 5 4 1 5 5 5 5 3 4 2 2 4 6 2 5]
```

On obtient vingt résultats, comme si on avait lancé vingt fois le dé.
De même :

```
# loi binomiale
B = rd.binomial(8, .333, 20)
print(B)
# [4 2 3 5 1 4 2 0 2 4 4 4 5 2 6 1 4 2 4 3]

# loi de Bernoulli = binomiale avec n=1
C = rd.binomial(1, .333, 20)
print(C)
# [0 0 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 0 0 1 1 1]

# loi géométrique
D = rd.geometric(.333, 20)
print(D)
# [2 1 1 1 5 2 4 1 3 1 2 1 4 2 1 1 2 1 2 1]

# loi de Poisson
E = rd.poisson(4, 20)
print(E)
# [2 5 3 7 2 3 4 4 5 5 1 4 3 7 3 4 4 8 5 3]
```

302.7

Pour chaque question, reconnaître la loi de X et en préciser les paramètres :

(a) on lance un dé équilibré à 6 faces et on note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu

(b) une urne contient 12 boules : 6 boules vertes, 4 boules rouges et 2 boules noires ; on tire au hasard successivement et avec remise 8 boules et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues

(c) une urne contient 12 boules : 6 boules vertes, 4 boules rouges et 2 boules noires ; on effectue des tirages successifs et avec remise jusqu'à obtenir une boule rouge et on note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués

(d) on range au hasard 10 boules dans 3 sacs de façon équiprobable et on note X le nombre de boules mises dans le premier sac

(e) les 32 cartes d'un jeu sont alignées, faces cachées, sur une table de façon aléatoire ; on découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir la dame de cœur et on note X la variable aléatoire égale au nombre de cartes découvertes

(f) une urne contient n jetons numérotés de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$) ; on les tire au hasard un à un sans remise jusqu'à obtenir le jeton numéro 1 et on note X le nombre de tirages effectués

(g) une urne contient n jetons numérotés de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$) ; on les tire au hasard un à un avec remise jusqu'à obtenir le jeton numéro 1 et on note X le nombre de tirages effectués

(h) on pose n questions à un élève ; pour chaque question, r réponses sont proposées dont une et une seule est correcte ; l'élève répond au hasard à chaque question et on note X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.

(i) Dans un magasin il y a n clients et m caisses. Chaque client choisit une caisse au hasard et on appelle X le nombre de clients choisissant la caisse numéro 1. Donner la loi de X.

302.8

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n, p. Quelle est la loi suivie par la variable $Y = n - X$?

302.9

Une variable aléatoire réelle X suit une loi binomiale de taille n et de paramètre $p \in]0, 1[$.
Pour quelle valeur de k, la probabilité

$$p_k = P(X = k)$$

est-elle maximale ?

302.10

Soit X une v.a.d. qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(a) Calculer la loi de $T = X^2 + 1$.

(b) Calculer $P(2X < X^2 + 1)$.

(c) Calculer la probabilité que X soit un nombre pair et montrer que X a « plus de chances » d'être paire qu'impaire.

Soit Y une v.a. réelle, indépendante de X, définie par :

$$P(Y = 1) = P(Y = 2) = \frac{1}{2}$$

(d) On note Z la v.a. XY. Calculer la probabilité que Z soit un nombre pair.

302.11

Une urne contient initialement deux boules blanches et une boule rouge. On effectue des tirages successifs selon le protocole suivant : on tire une boule, puis on la remet dans l'urne et on ajoute dans l'urne une boule blanche et une boule rouge.
Quelle est la loi de probabilité du numéro de la première apparition d'une boule blanche ?

302.12

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p, avec $0 < p < 1$.
On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, et u_n la probabilité pour que S_n soit pair.

(a) Préciser, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la loi de S_n.

(b) Calculer u_1, u_2, u_3.

(c) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_{n+1} = au_n + b$.

En déduire une expression de u_n en fonction de n, puis la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

302.13

On effectue une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée.
On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier pile (resp. face).

(a) Déterminer la loi du couple (X, Y).

(b) Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

(c) Déterminer la loi de la v.a. $Z = X + Y$.

302.14

Soit $p \in]0\,,1[$. On définit, pour tout$(i, j) \in N^2$, les réels $a_{i,j}$ par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} p^2(1-p)^{j-2} & \text{si} \quad 1 \leqslant i < j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Montrer que $\left\{(i, j, a_{i,j})\ ;\ (i, j) \in \mathbb{N}^2\right\}$ est la loi d'un couple (X, Y) de variables aléatoires discrètes.

(b) Déterminer les lois marginales de X et de Y.

Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

(c) Soit $j \geqslant 2$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(Y = j)$.

302.15

(a) Soit $p \in]0, 1[$. On dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois Pile. Soit X le nombre aléatoire de Face obtenu au cours de cette expérience.

a1. Déterminer la loi de X. Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$.

a2. Montrer que X admet une espérance et calculer sa valeur.

(b) On procède alors à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n + 1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne et on tire ensuite au hasard une boule de cette urne. On note Y le numéro obtenu.

b1. Déterminer la loi de Y.

b2. Montrer que Y admet une espérance et calculer sa valeur.

(c) On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.

Petits problèmes d'entrainement

✍ **302.16**

Une urne contient des boules noires et blanches, la proportion de boules noires étant $p \in]0,1[$. On effectue une succession de tirages d'une boule avec, à chaque fois, remise de la boule obtenue avant d'effectuer le tirage suivant. On note X la longueur de la première suite de boules de même couleur et Y la longueur de la deuxième suite de boules de même couleur. Ainsi, l'événement $(X = 2) \cap (Y = 3)$ est réalisé ssi on a tiré $(n, n, b, b, b, n, \ldots)$ ou $(b, b, n, n, n, b, \ldots)$ où n désigne le tirage d'une boule noire et b celui d'une boule blanche.

(a) Déterminer la loi de $X + Y$.

(b) Calculer la probabilité de l'événement $X = Y$.

✍ **302.17**

Soit m et n deux entiers naturels non nuls. On dispose d'une urne contenant m jetons rouges numérotés de 1 à m et n jetons noirs numérotés de 1 à n.
On effectue une succession de tirages avec remise dans cette urne. On note X le rang d'apparition du premier jeton numéroté 1 et Y celui du premier jeton rouge. Donner une condition nécessaire et suffisante sur m et n pour que X et Y soient indépendantes.

302.18

Un sauteur en hauteur tente de franchir, dans cet ordre, des hauteurs successives numérotées : $1, 2, 3, \ldots$. La probabilité, pour tout entier naturel k non nul, de franchir la hauteur k, vaut $\frac{1}{k}$. Le sauteur est contraint d'abandonner la compétition à son premier échec. On note X le numéro de la dernière hauteur franchie par notre sauteur.
Vérifier que X est bien une variable aléatoire et déterminer la loi de X.

302.19

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(a) Montrer que pour n assez grand,

$$P(X \geqslant n) \leqslant \frac{n+1}{n+1-\lambda} P(X = n)$$

(b) b1. En déduire que $P(X \geqslant n) \underset{n\to+\infty}{\sim} P(X = n)$.

b2. En déduire qu'au voisinage de l'infini,

$$P(X > n) = o(P(X = n))$$

302.20

Démontrer que la fonction de répartition d'une v.a. X suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, est donnée par

$$\forall n,\ P(X \leqslant n) = \frac{1}{n!}\int_{\lambda}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^n \mathrm{d}x$$

302.21

Deux joueurs A et B procèdent l'un après l'autre à une succession de lancers d'une même pièce, amenant Pile avec la probabilité $p \in]0\,,1[$. On pose $q = 1 - p$.
Le joueur A commence et il s'arrête dès qu'il obtient le premier Pile. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A.
Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de Piles obtenus par le joueur B.

(a) Déterminer la loi de X.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = n)$.

(c) En déduire :

$$P(Y=0)=\frac{q}{1+q}$$

et

$$\forall k \geqslant 1, \quad P(Y=k)=\frac{1}{(1+q)^2}\left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1}$$

Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=k)=1$.

(d) Le joueur B gagne s'il obtient au moins un Pile, sinon c'est le joueur A qui gagne.

Le jeu est-il équitable ?

302.22

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p avec $p \in\,]0,1[$. On note

$$b(k,n,p)=P(X=k)$$

(a) Pour quelle valeur m de k, le coefficient $b(k,n,p)$ est-il maximal ?

(b) Etudier la monotonie de la fonction $f : x \mapsto x^m(1-x)^{n-m}$ sur $[0,1]$.

(c) Vérifier que si $m \in [np,(n+1)p]$ alors

$$b\left(m,n,\frac{m}{n+1}\right) \leqslant b(m,n,p) \leqslant b\left(m,n,\frac{m}{n}\right)$$

(d) Proposer en encadrement analogue pour $m \in [(n+1)p-1, np]$.

(e) Utiliser la formule de Stirling pour donner un équivalent simple de $b(m,n,p)$.