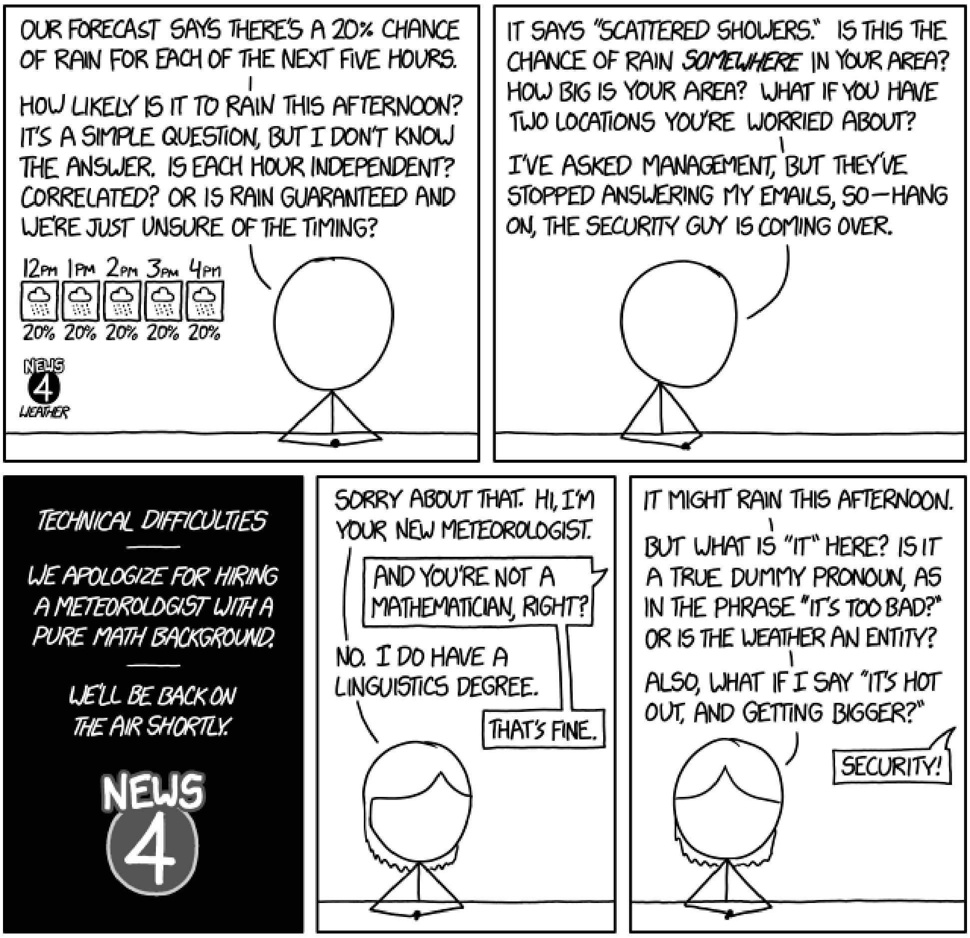
Variables aléatoires discrètes, la suite

Cours 3

Exercices 11



https://xkcd.com/1985

Dans tout le chapitre, et sauf mention contraire, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ désigne un espace probabilisé.

1 Espérance et variance

1.1 Espérance

Une variable aléatoire discrète X peut prendre plusieurs valeurs, avec des probabilités différentes. On donne un sens formel à la « valeur moyenne » de X.

Définition. On considère X une variable aléatoire réelle discrète, dont le support fini ou dénombrable. On dit que X est **d'espérance finie** la famille $(x\,P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, sa somme s'appelle alors **l'espérance de** X, noté $\mathrm{E}(X)$:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\,P(X = x)$$

Remarque.

- *Si X est à valeurs positives, on peut calculer $\sum_{x\in X(\Omega)} x\,P(X = x)$ dans $[0, +\infty]$.*
- *Si X est à valeurs dans $[0, +\infty]$, on adopte la convention que $xP(X = x) = 0$ lorsque $x = +\infty$ et $P(X = x) = 0$, et on peut calculer $\sum_{x\in X(\Omega)} x\,P(X = x)$ dans $[0, +\infty]$.*
- *Lorsque $E(X) = 0$, on dit que la v.a. X est **centrée**.*
- *Pensons l'espérance comme un **indicateur de position** de la v.a.*

Remarque. *En première année, le support de X est fini et l'espérance est définie par :*

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$$

La définition proposée cette année permet la généralisation au cas où Ω est infini, en regroupant les ω qui ont la même image par X. Il s'agit d'un transfert au sens du § 1.2.
La sommabilité permet de garantir que la définition est indépendante de l'ordre de l'énumération.

Exemple. On lance deux dés, et on note X la variable aléatoire égale à la somme des numéros qui apparaissent sur les deux dés. Montrer que X est d'espérance finie et calculer $\mathrm{E}(X)$.

Exemple. On considère X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, définie par sa loi en posant :

$$\forall n \geqslant 1,\ P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}$$

Justifier que l'on définit ainsi une loi de probabilités.
Cette variable aléatoire admet-elle une espérance finie ?

Exemple. Quelle est l'espérance d'une variable aléatoire discrète constante, égale à a ?

Proposition. Deux variables aléatoires discrètes X et Y admettant la même loi et ayant une espérance finie ont la même espérance.

Espérance des lois usuelles.

- Si $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, n\rrbracket)$, alors $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$.
- Si $X \sim \mathscr{B}(p)$, alors $E(X) = p$.
- Si $X \sim \mathscr{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$.
- Si $X \sim \mathscr{G}(p)$, alors $E(X) = \dfrac{1}{p}$.
- Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, alors $E(X) = \lambda$.

Théorème.

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. On a :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$$

Exemple. Soit $X \sim \mathscr{G}(p)$. Calculer l'espérance de X.

1.2 Propriétés de l'espérance

Formule de transfert.

Soit X une variable aléatoire discrète et f une fonction définie sur $X(\Omega)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. La variable aléatoire $f(X)$ a un espérance finie si et seulement si $\big(f(x)P(X = x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. On a dans ce cas :

$$\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,P(X = x)$$

Remarque. *Lorsque le support de X est fini, la somme est finie et on retrouve le résultat de première année.*

Exemple. Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $-1, 0, 1$ avec les probabilités respectives $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$ et $\frac{6}{9}$. Vérifier que $\mathrm{E}(X^2) = \frac{7}{9}$.

Linéarité de l'espérance. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes d'espérances finies. Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda X + \mu Y$ est d'espérance finie et :

$$\mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathrm{E}(X) + \mu \mathrm{E}(Y)$$

Exemple. On (re-)lance deux dés, et on note X la variable aléatoire égale à la somme des numéros qui apparaissent sur les deux dés. Montrer que X est d'espérance finie et calculer $\mathrm{E}(X)$.

Positivité de l'espérance.
Si $X \geqslant 0$, c'est-à-dire si X ne prend que des valeurs positives, alors $\mathrm{E}(X) \geqslant 0$.

Croissance de l'espérance.
Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes d'espérances finies telles que $X \leqslant Y$, c'est-à-dire $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors $\mathrm{E}(X) \leqslant \mathrm{E}(Y)$.

Proposition.
Si $0 \leqslant X \leqslant Y$ et Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

Proposition.
Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X = 0)$ est presque-sûr.

Proposition.
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes, d'espérances finies. Alors XY admet une espérance finie et :

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

Remarque. *Ce résultat peut être généralisé au cas de n variables indépendantes et d'espérance finie.*

1.3 Inégalité de Markov

Inégalité de Markov.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète d'espérance finie. Alors, pour tout $a > 0$:

$$P(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{E}(|X|)}{a}$$

Remarque. *C'est une majoration de la probabilité que la v.a. prenne de grandes valeurs.*

Exemple. Au dernier devoir de mathématiques, la moyenne de la classe était de 9/20. Que dire de la proportion d'étudiants ayant eu plus de 15/20 ?

1.4 Variance

Si $E(X)$ est la « valeur moyenne » de la v.a. X, on souhaite contrôler l'écart entre la valeur de X et cette moyenne : $|X - E(X)|$. En pratique, le carré $(X - E(X))^2$ est bien plus facilement manipulable et permet de connaître la valeur absolue.

Lemme. Soit X une variable aléatoire réelle discrète.
Si X^2 est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

Définition. Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Si X^2 est d'espérance finie, on définit la **variance** de X par :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right)\\ &= \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2\end{aligned}$$

et l'**écart-type** de X :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque.

- *On a vu que l'espérance est un indicateur de position des valeurs d'un v.a. La covariance et l'écart-type sont des* ***indicateurs de dispersion*** *de ces valeurs.*
- *Si X, variable aléatoire réelle discrète est telle que X^m ($m \in \mathbb{N}^*$) est d'espérance finie, on dit que X admet un* ***moment d'ordre*** *m et ce moment d'ordre m est $\mathrm{E}(X^m)$. Ainsi, le lemme précédent se reformule en « si X admet un moment d'ordre 2, alors X admet un moment d'ordre 1. »*
- *On dit qu'une v.a. est* ***réduite*** *lorsque sa variance vaut* 1.

Remarque. *Pour calculer une variance, on sera amené à calculer $\mathrm{E}(X^2)$; il sera alors souvent utile de remarquer pour réaliser ce calcul de série que $X(X-1) = X^2 - X$, donc par linéarité de l'espérance, $\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{E}(X(X-1)) + \mathrm{E}(X)$.*

Proposition. Pour tout a, b réels :

$$\mathrm{V}(aX + b) = a^2 \mathrm{V}(X)$$

Proposition. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes admettant un variance. Alors $X+Y$ admet une variance et :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

Remarque. *Ce résultat se généralise à une somme finie de v.a. indépendantes.*

Remarque. *Si $\sigma(X) > 0$, alors la variable $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.*

Variance des lois usuelles.

- Si $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, alors $V(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$.
- Si $X \sim \mathscr{B}(p)$, alors $V(X) = p(1-p)$.

- Si $X \sim \mathscr{B}(n, p)$, alors $V(X) = np(1-p)$.
- Si $X \sim \mathscr{G}(p)$, alors $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.
- Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, alors $V(X) = \lambda$.

1.5 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète, telle que X^2 soit d'espérance finie.
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\big(\,|X - \mathrm{E}(X)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Remarque. *On peut exprimer le résultat en passant à l'événement contraire :*

$$P\big(\,|X - \mathrm{E}(X)| < \varepsilon\big) \geqslant 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Remarque. *L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet de comprendre ce que mesure la variance : pour $\varepsilon > 0$ fixé, la probabilité que l'écart entre X et $\mathrm{E}(X)$ soit supérieur à ε est d'autant plus petite que $\mathrm{V}(X)$ est faible : la variance donne donc une indication de la dispersion de X autour de son espérance, i.e. sa plus ou moins forte tendance à s'écarter de sa moyenne.*
L'écart-type, qui mesure aussi la dispersion de X, présente l'intérêt de s'exprimer dans la même unité que les valeurs prises par la variable aléatoire X.

Exemple. Pour $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, montrer que :

$$P\left(X \leqslant \frac{\lambda}{2}\right) \leqslant \frac{4}{\lambda} \text{ et } P\left(X \geqslant 2\lambda\right) \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

1.6 Covariance

Exemple. On considère deux v.a. X et Y. Que vaut $E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)$ lorsque :

- X et Y sont indépendantes ;
- X et Y sont liées par une relation de dépendance affine $Y = aX + b$?

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Soit X et Y des variables aléatoires réelles discrètes admettant des variances. Alors :

- XY est d'espérance finie
- $|\mathrm{E}(XY)| \leqslant \sqrt{\mathrm{E}(X^2)}\,\sqrt{\mathrm{E}(Y^2)}$.

Remarque. *On peut aussi vérifier qu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si X et Y sont proportionnelles avec probabilité 1, au sens où :*

$$P(X = 0) = 1 \textit{ ou } \exists a \textit{ t.q. } P(Y = aX) = 1$$

On mesure, d'une certaine façon, les dépendances affines en regardant si on est « loin » de l'égalité dans l'inégalité, après centrage.

Définition. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes admettant des variances.
On appelle **covariance de X et Y** le réel :

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X,Y) &= \operatorname{E}\big((X-\operatorname{E}(X))(Y-\operatorname{E}(Y))\big)\\ &= E(XY)-E(X)E(Y)\end{aligned}$$

Proposition. Si X et Y sont indépendantes, leur covariance est nulle.
Remarque. *La réciproque est fausse. Si la covariance est nulle, X et Y peuvent ne pas être indépendantes. Elles sont simplement* ***non corrélées****.*
Règles de calcul.

- $(X,Y)\mapsto \operatorname{Cov}(X,Y)$ est une application bilinéaire, symétrique, positive.
- $V(X)=\operatorname{Cov}(X,X)$.
- $\operatorname{Cov}(X-a,Y-b)=\operatorname{Cov}(X,Y)$
- $V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\operatorname{Cov}(X,Y)$
- Plus généralement :

$$\begin{aligned}V(X_1+\cdots+X_n) &= \sum_{i=1}^{n} V(X_i)+\sum_{i\neq j}\operatorname{Cov}(X_i,X_j)\\ &= \sum_{i=1}^{n} V(X_i)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\operatorname{Cov}(X_i,X_j)\end{aligned}$$

2 Fonctions génératrices

On s'intéresse dans ce paragraphe aux variables aléatoires qui sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. Typiquement, celles qui apparaissent dans des situations de comptage.

2.1 Définition

Lemme. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. La série entière :

$$\sum_{n\geqslant 0} P(X=n)t^n$$

converge normalement sur $[-1,1]$, et son rayon de convergence satisfait : $R_X \geqslant 1$.
Définition. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit la **fonction génératrice** de X par :

$$G_X\ :\ t\mapsto \sum_{n\geqslant 0} P(X=n)t^n$$

Remarque. *$G_X(1)=1$ et $G_X(t)=\operatorname{E}(t^X)$ par la formule de transfert.*
Proposition. La loi d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice.
Fonctions génératrices des lois usuelles.

- Si $X\sim\mathscr{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$, alors $G_X(t)=\dfrac{1}{n}(t+t^2+\cdots+t^n)$.
- Si $X\sim\mathscr{B}(p)$, alors $G_X(t)=pt+(1-p)$.

- Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, alors $G_X(t) = (pt + (1-p))^n$.
- Si $X \sim \mathscr{G}(p)$, alors $G_X(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$.
- Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, alors $G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$.

2.2 Propriétés

Proposition. On conserve les notations précédentes. G_X est continue sur $[-1,1]$.

Proposition. On conserve les notations précédentes.
X admet une espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 (à gauche).
Dans ce cas :

$$\mathrm{E}(X) = G'_X(1)$$

Proposition. On conserve les notations précédentes.
X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1 (à gauche).
Dans ce cas :

$$G''_X(1) = \mathrm{E}(X(X-1))$$

Remarque. *De cette égalité, il faut savoir retrouver rapidement l'expression de la variance à l'aide de G :*

$$\mathrm{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$$

Exemple. Retrouver par les fonctions génératrices espérance et variance des lois usuelles.

2.3 Fonction génératrice et somme

Proposition. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $t \in]-1,1[$:

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)\,G_Y(t)$$

où $G_X(t)\,G_Y(t)$ est le produit de Cauchy des deux séries entières.

Proposition. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Alors :

$$X + Y \sim \mathscr{P}(\lambda + \mu)$$

Proposition. Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si elles sont indépendantes, alors pour tout $t \in]-1,1[$:

$$G_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = G_{X_1}(t)\,G_{X_2}(t)\,\dots\,G_{X_n}(t)$$

3 Loi faible des grands nombres

Loi faible des grands nombres.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie. On note $m = \mathrm{E}(X_1)$ (les espérances sont toutes égales), $\sigma = \sigma(X_1)$ (les écarts-types sont tous égaux) et :

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

et donc :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Remarque. *Pour déterminer la probabilité d'un événement A, l'idée courante consiste à répéter l'expérience aléatoire un grand nombre de fois, et observer le nombre d'apparition de l'événement A. Lorsque le nombre d'expérience augmente, la fréquence d'apparition de A devrait se rapprocher de la probabilité de A.*
La loi faible des grands nombres formalise et quantifie cette intuition : En notant $p = P(A)$ et X_k l'indicatrice de A, on a $X_k \sim \mathscr{B}(p)$ et X_k représente le nombre de fois que A a été observé à l'expérience k. Ainsi, la fréquence d'apparition de A au cours des n répétitions est la variable aléatoire :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Par la loi faible des grands nombres,

$$\forall\varepsilon > 0,\ P(|M_n - p| < \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

On peut dire que l'événement « M_n tend vers $p = P(A)$ » est quasi-certain.

4 Exercices et résultats classiques à connaître

4.1 Un calcul d'espérance

303.1

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_n = \dfrac{\alpha}{n2^n}$.

(a) Déterminer α pour que la famille $(n, p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X.

(b) X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

(c) Quelle est l'espérance de la variable aléatoire $Y = (\ln 2)X - 1$?

4.2 Une v.a. dont la loi est définie par récurrence

303.2

Soit $\lambda > 0$ et X un variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \frac{\lambda}{n} P(X = n - 1)$$

(a) Déterminer la loi de X.

(b) Déterminer l'espérance de $Y = \dfrac{1}{X+1}$.

4.3 Un couple de v.a.

303.3

On lance une pièce amenant pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$, jusqu'à l'obtention de deux piles au total. On note X le nombre de faces alors obtenues.
Si $X = n$, on met $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire une boule au hasard. On note Y le numéro de la boule obtenue.

(a) Déterminer la loi de X. Calculer $\mathrm{E}(X)$.

(b) Déterminer la loi du couple (X, Y), et en déduire la loi de Y. Calculer $\mathrm{E}(Y)$.

(c) On définit la variable aléatoire $Z = X - Y$. Montrer que Y et Z sont indépendantes.

4.4 Identité de Wald

303.4

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Soit N une autre variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante des X_i. On s'intéresse à :

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

On note qu'ici le nombre de termes dans la somme est la variable aléatoire N.

(a) Qu'est-il raisonnable de conjecturer quant à la valeur de $E(S)$?

(b) Justifier que S est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(c) Montrer que, pour $t \in [-1, 1]$:

$$G_S(t) = G_N(G_X(t))$$

On admettra sans justification les interversions de sommes utilisées.

(d) On suppose que N et X sont d'espérance finie. Établir :

$$E(S) = E(N)E(X)$$

(e) On lance une pièce honnête. Tant que l'on obtient « pile », on lance un dé et on avance son pion du nombre de cases correspondantes. De combien de case avance le pion en moyenne ?

Exercices de mathématiques

303.5

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X=n+1)=\frac{a}{n+1}P(X=n)$.

(a) Déterminer la loi de X.

(b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

(c) La variable aléatoire X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

303.6

Une urne contient quatre boules rapportant 0, 1, 1 et 2 points respectivement. On y effectue n tirages avec remise, et on note S le score total obtenu.
Déterminer la fonction génératrice de S, et en déduire la loi de S.

303.7

Soit X une v.a. qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et Y une v.a. indépendante de X.

(a) Dans cette question, Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
On définit la v.a. Z par $Z=0$ si $Y=0$, et $Z=X$ sinon.
Déterminer la loi de Z, son espérance et sa variance, si elles existent, et la loi de Y conditionnée par $(Z=0)$.

(b) On suppose maintenant que Y suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Calculer la probabilité que X soit égale à Y.

303.8

Un signal est diffusé via un canal et un bruit vient malheureusement s'ajouter à la transmission. Le signal est modélisé par une variable aléatoire discrète réelle S d'espérance m_S et de variance σ_S^2 connues. Le bruit est modélisé par une variable B indépendante de S d'espérance nulle et de variance $\sigma_B^2 > 0$. Après diffusion, le signal reçu est $X = S + B$.
Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ pour que $Y = aX + b$ soit au plus proche de S i.e. tel que l'espérance $\mathrm{E}\left((Y-S)^2\right)$ soit minimale.

303.9

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini. Établir :

$$E(X)^2 \leqslant E\left(X^2\right)$$

303.10

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables mutuellement indépendantes suivant une même loi d'espérance m et de variance σ^2.

(a) On pose

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Calculer espérance et variance de $\bar{X}_n$.

(b) On pose

$$V_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}_n\right)^2$$

Calculer l'espérance de V_n.

303.11

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ fixé.
Une urne contient N jetons numérotés de 1 à N. On effectue une suite infinie de tirages d'un jeton avec remise dans l'urne du jeton tiré.
On note, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, X_i la variable aléatoire égale au numéro du jeton obtenu au i-ème tirage.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance et la variance de S_n.

303.12

Soit $p \in]0\,,1[$. On définit, pour tout$(i,j) \in N^2$, les réels $a_{i,j}$ par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} (1-p)^{j-2}p^2 & \text{si } \ 1 \leqslant i < j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Montrer que $\left\{(i,j,a_{i,j})\ ;\ (i,j) \in \mathbb{N}^2\right\}$ est la loi d'un couple (X,Y) de variables aléatoires discrètes.

(b) Déterminer les lois marginales de X et de Y.

Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

(c) Soit $j \geqslant 2$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(Y = j)$.

303.13

On répète, de façon indépendante, une expérience aléatoire au cours de laquelle un événement A se réalise, à chaque fois, avec la probabilité $p\ \ (0 < p < 1)$.
On note X la variable aléatoire égale au rang de la première réalisation de l'événement A, et Y celle égale au rang de sa deuxième réalisation.

(a) Déterminer la loi du couple (X,Y). En déduire les lois marginales X et Y.

(b) Montrer que X et Y admettent une espérance et une variance et calculer $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{V}(X)$, $\mathrm{V}(Y)$.

(c) Montrer que (X,Y) admet une covariance et calculer $\mathrm{Cov}\,(X,Y)$.

(d) Soit $n \geqslant 2$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(Y = n)$.

303.14

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2.

On note $m = \mathrm{E}(X_1)$ et on suppose que $\mathrm{V}(X_1) = 10^{-1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Déterminer un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on ait :

$$P\big(|M_n - m| \geqslant 10^{-2}\big) \leqslant 10^{-3}$$

Petits problèmes d'entrainement

✍ **303.15**

On dispose d'une pièce déséquilibrée, amenant pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première fois deux piles consécutifs, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = P(X = n)$.

(a) Calculer a_1, a_2, a_3.

(b) Montrer : $\forall n \geqslant 3, \quad a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{2}{9}a_{n-2}$.

(c) En déduire la loi de X.

(d) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

✍ **303.16**

On considère une expérience aléatoire ayant une probabilité p de réussir de $q = 1-p$ d'échouer définissant une suite de variables de Bernoulli indépendantes $(X_n)_{n\geqslant 1}$.
Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note S_m la variable aléatoire déterminant le nombre d'essais jusqu'à l'obtention de m succès :

$$S_m = k \iff X_1 + \cdots + X_k = m \text{ et } X_1 + \cdots + X_{k-1} < m$$

(a) Déterminer la loi et la fonction génératrice de S_1.

(b) Même question avec $S_m - S_{m-1}$ pour $m \geqslant 2$.

(c) Déterminer la fonction génératrice de S_m puis la loi de S_m.

303.17

On effectue des tirages successifs dans une urne qui contient initialement une boule rouge et une boule blanche. À chaque tirage, on note la couleur de la boule tirée et on la remet dans l'urne en ajoutant en plus une boule rouge.
On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule rouge et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

(a) Déterminer la loi de Y et la loi de Z.

(b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

303.18

On considère une variable aléatoire discrète X vérifiant $X(\Omega) = \mathbb{Z}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n+1) = \frac{1}{n+1} P(X = n)$ et $P(X = -n) = P(X = n)$.

(a) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{Z}$, $P(X = n)$ en fonction de $P(X = 0)$.

En déduire $P(X = 0)$ puis la loi de X.

(b) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et une variance, et calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

303.19

On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité $p > 0$ de réussir et $1 - p$ d'échouer.

On répète l'expérience indépendamment jusqu'à obtention de m succès et on note X le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ces m succès.

(a) Reconnaître la loi de X lorsque $m = 1$.

(b) Déterminer la loi de X dans le cas général $m \in \mathbb{N}^*$.

(c) Exprimer le développement en série entière de

$$t \mapsto \frac{1}{(1-t)^m}$$

(d) Déterminer la fonction génératrice de X et en déduire l'espérance de X.

303.20

On se propose d'analyser le sang d'une population de N individus pour y déceler l'éventuelle présence d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne donnée avec la probabilité p indépendamment des autres.
On dispose pour cela de deux protocoles :
Protocole 1 :
On analyse le sang de chacun des N individus.
Protocole 2 :
On regroupe les individus par groupe de n (on suppose N divisible par n). On rassemble la collecte de sang des individus d'un même groupe et on teste l'échantillon. Si le résultat est positif, on analyse alors le sang de chacun des individus du groupe.

(a) Préciser la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de groupes positifs.

(b) Soit Y la variable aléatoire déterminant le nombre d'analyses effectuées dans le deuxième protocole.
Exprimer l'espérance de Y en fonction de n, N et p.

(c) Comparer les deux protocoles pour les valeurs $N = 1000$, $n = 10$ et $p = 0,01$.

303.21

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![1, n]\!]$.

(a) Exprimer $E(X)$ en fonction de $P(X \geqslant k)$.

(b) On suppose les variables X et Y uniformes.
Déterminer l'espérance de $\mathrm{Min}(X, Y)$ puis de $\mathrm{Max}(X, Y)$.
Déterminer aussi l'espérance de $|X - Y|$.

303.22

Ici, plutôt que de vider une urne, on va la remplir !
Soit une urne contenant une boule blanche et une boule noire. On dispose par ailleurs d'une réserve suffisante de boules blanches et noires, et on répète n fois l'action suivante :
on tire une boule dans l'urne. Si cette boule est blanche (respectivement noire), on la remet dans l'urne, et on rajoute une boule blanche (respectivement noire) dans l'urne.
On désigne par X_n la variable aléatoire « nombre de boules blanches dans l'urne » après ces n tirages. Quelle est la loi de X_n ?
Indication : examiner les petites valeurs de n *peut donner des idées*

303.23

On effectue une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée.
On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier pile (resp. face).

(a) Déterminer la loi du couple (X, Y).

(b) Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

(c) Déterminer la loi de la v.a. $Z = X + Y$.

303.24

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant :
$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X = i, Y = j) = \dfrac{a}{i!\, j!}$.

(a) Déterminer la valeur de a.

(b) Déterminer la loi de X et la loi de Y. Montrer que X et Y admettent une espérance et calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{E}(Y)$.

(c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

(d) On pose $Z = X + Y$. Déterminer la loi de Z. Montrer que Z admet une espérance et calculer $\mathrm{E}(Z)$.

303.25

300 personnes vont voir un film projeté dans deux salles de cinéma. Chaque salle contient N places, où $150 \leqslant N \leqslant 300$.
Déterminer une valeur de N pour que la probabilité que chaque personne trouve une place dans la salle qu'elle a choisie soit supérieure à 0.99.
Proposer un code Python permettant d'en faire le calcul exact.

303.26

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$.
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}, \qquad Y_n = \frac{X_n + X_{n+1}}{2}, \qquad T_n = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}.$$

(a) Justifier : $\forall \varepsilon > 0, \ \lim\limits_{n \to +\infty} P\Big(\big|S_n - p\big| \geqslant \varepsilon\Big) = 0$.

(b) b1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la loi et l'espérance de Y_n.

b2. Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n < m$.
Les variables aléatoires Y_n et Y_m sont-elles indépendantes ?

(c) Montrer : $\forall \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} P\Big(\big|T_n - p\big| \geqslant \varepsilon\Big) = 0.$

303.27

Une population de personnes présente une propriété donnée avec une proportion inconnue $p \in]0,1[$.
On choisit un échantillon de n personnes et l'on pose $X_i = 1$ si le i-ème individu présente la propriété étudiée, 0 sinon. On considère que les variables aléatoires X_i ainsi définies sont indépendantes et suivent toute une loi de Bernoulli de paramètre p.

(a) Quelle est la loi suivie par

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n\,?$$

(b) Déterminer espérance et variance de S_n/n.

(c) Soit $\varepsilon > 0$. Etablir

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

(d) Pour $\varepsilon = 0,05$, quelle valeur de n choisir pour que S_n/n soit voisin de p à ε près avec une probabilité supérieure à 95 % ?