Corrigé

601.1

Mines-Télécom

Soit $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des v.a. telles que $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et indépendantes entre elles. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(a) Donner $E\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$ et $V\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$.

(b) Montrer que $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$.

(c) On pose $u_n = \dfrac{1}{\ln^2 n} P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right)$. Donner la nature de $\sum u_n$.

Examinateur très cool avec qui j'ai pu discuter, et qui acquiesce lorsque c'est juste.

Corrigé

601.2

cc-INP

On considère :

$$f_n(x) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-nx}}{x^a(1+x^n)}$$

et $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

(a) Soit $a \in [0,1]$. Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction à déterminer.

(b) A-t-on convergence uniforme pour certaines valeurs de a ?

(c) Soit $a \in [0,1]$. Montrer que I_n est bien définie.

(d) Soit $a \in [0,1[$. Montrer que $(I_n)_n$ admet une limite. La calculer.

(e) $(I_n)_n$ admet-elle une limite pour $a = 1$?

Examinatrice réactive mais qui découvrait le sujet en même temps que moi. Elle marquait vite son assentiment ou sa réprobation. Pas d'horloge dans la salle, peu de brouillons fournis et pas de bouchons d'oreilles fournis. Les deux sujets d'exercices m'ont été donnés au début de la préparation.

Corrigé

601.3

Mines-Ponts

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, telle que :

$$f_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que les f_n sont polynomiales.

(b) Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement. On note f sa limite. Montrer que, pour $x \in [0,1]$, $f(x) \leqslant \mathrm{e}^x$.

(c) Montrer que $\sum f_{n+1} - f_n$ converge normalement, et en déduire que $(f_n)_n$ converge uniformément.

(d) On note f la limite de $(f_n)_n$. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ et vérifie :

$$\forall x \in [0,1],\ f'(x) = f(x - x^2)$$

Examinateur très agréable, qui donne des indications pour mettre sur la bonne voie. Il invitait à passer si je ne savais pas répondre.

Corrigé

601.4

Mines-Ponts

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et :

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha \\ \alpha & \cdots & \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

(a) Est-ce que M_α est diagonalisable ? Donner son spectre.

(b) Soit E un espace euclidien de dimension n. On considère u_1, u_2, ..., u_{n+1} des vecteurs distincts de E de norme 1, et tels que pour tout $i \neq j$:

$$\langle u_i, u_j \rangle = \alpha$$

Déterminer α.

(c) Montrer l'existence des vecteurs précédents.

Corrigé

601.5

Centrale 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$f_n(x) = \frac{1 + \sin(2\pi n x)}{1 + n^2 x^2}$$

(a) Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. La convergence est-elle uniforme ?

(b) Donner l'allure du graphe de f_5.

(c) On note, pour $\varepsilon \in]0, 1]$, $A_n = f^{-1}([\varepsilon, +\infty[)$ et $u_n = \mathbb{1}_{A_n}$.
Montrer que u_n est continue par morceaux.

(d) *Pas faite.*

Corrigé

601.6

Mines-Ponts

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(a) Montrer que $P(X \leqslant n) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_\lambda^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^n \,\mathrm{d}t$.

(b) En déduire un équivalent de :

$$\int_\lambda^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^n \,\mathrm{d}t$$

(c) À l'aide de la fonction génératrice de X, calculer la probabilité que X soit paire.

(d) Soit Y suivant une loi uniforme sur $\{1, 2\}$. Calculer la probabilité que XY soit paire.

Corrigé

601.7

cc-INP

Soit X et Y deux v.a. indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$. On note $Z = X + Y$.

(a) Montrer que $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda + \mu)$.

(b) Trouver la loi de X sachant $(Z = n)$.

Corrigé

601.8

cc-INP

On s'intéresse à :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= u_n + 2v_n - w_n \\ v_{n+1} &= -u_n + 4v_n - w_n \\ w_{n+1} &= -u_n + 2v_n + w_n \end{cases}$$

et on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

(a) a1. Donner $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.

a2. Exprimer X_n en fonction de A, X_0 et n.

(b) A est-elle diagonalisable ?

(c) Donner les sous-espaces propres de A et trouver une matrice triangulaire T semblable à A. Exprimer la relation liant A et T.

(d) Donner l'expression de X_n en fonction de n et des matrices précédemment construite.

Corrigé

601.9

cc-INP

On considère :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Donner $\operatorname{rg}(A)$ et $\dim \operatorname{Ker} A$.

(b) Est-ce que A est diagonalisable ?

(c) Quelle est la multiplicité de la valeur propre 0 ?

(d) Montrer qu'il existe $\lambda > 1$ tel que $\operatorname{Sp}(A) = \{0, \lambda, 1 - \lambda\}$.

(e) Donner un polynôme annulateur de A de degré 3.

Examinateur froid, oral en totale autonomie.

Corrigé

601.10

cc-INP

On considère :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2} \,\mathrm{d}t$$

(a) Déterminer le domaine de définition de F. Calculer $F(0)$.

(b) Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$.
Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

(c) Montrer que est solution d'une équation différentielle linéaire (E).

(d) Résoudre (H), équation homogène associé à (E).

(e) Montrer que la fonction suivante est solution de (E) :

$$G(x) = \dots$$

J'ai oublié l'expression de G.

(f) *D'autres questions non traitées.*

Corrigé

601.11

Mines-Télécom

On considère :

$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

(a) Donner D_f.

(b) Calculer $f(1)$.

(c) Montrer que $f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x}$.

(d) Déterminer les variations de f.

(e) Trouver un équivalent en 0.

Corrigé

601.12

Mines-Télécom

On considère :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner le rang et l'image de A. Est-elle diagonalisable ? Donner les dimensions de ses espaces propres.

Étudiant 1 : *Colleur pénible qui te prend pour un sup venant de découvrir le cours alors que les deux exos sont faisables en 5 minutes.*
Étudiant 2 : *Examinateur qui ne te laisse pas parler et te coupe la parole sans arrêt. Il a inventé la notion d'équivalence par rang...*

Corrigé

601.13

Mines-Ponts

On note T_n le nombre de partitions (non nulles) d'un ensemble à n éléments. On convient que $T_0 = 1$.

(a) Trouver T_1, T_2, T_3.

(b) Montrer que, pour tout n : $T_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_k$.

(c) En déduire que $T_n \leqslant n^n$.

(d) Montrer que le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{T_n}{n!} x^n$ n'est pas nul.

(e) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T_n}{n!} x^n$.

Examinateur qui aide et guide si on n'y arrive pas.

Corrigé

601.14

Mines-Ponts

Soit $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$ de cardinal 1, 2 ou 3. On note $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{3} (X - z_k)$.

(a) Montrer que $Z \subset P^{-1}(\{0\})$.

(b) Trouver a et b tels que $P = X^3 - aX^2 + bX - z_1 z_2 z_3$.

(c) En utilisant les deux questions précédentes, exprimer $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} z_k^3 - 3 z_1 z_2 z_3$ en fonction de a et b uniquement.

(d) *pas eu le temps.*

Corrigé

601.15

Centrale 1

Soit $I = [0, 2\pi]$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 0$ et $|z| < 1$.

(a) Montrer que $t \mapsto |z - \mathrm{e}^{it}|$ ne s'annule pas sur I.
Que dire quant à la continuité de $f \ : \ t \mapsto \dfrac{1 - |z|^2}{|z - \mathrm{e}^{it}|^2}$?

(b) Montrer que la famille $(t \mapsto 1, t \mapsto \mathrm{e}^{it}, t \mapsto \mathrm{e}^{-it})$ est libre.

(c) Montrer qu'il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall t, \ f(t) = -1 + \frac{\alpha}{1 - z\mathrm{e}^{-it}} + \frac{\beta}{1 - \overline{z}\mathrm{e}^{it}}$$

je crois...

(d) Montrer que $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \,\mathrm{d}t = 1$.

Corrigé

601.16

Mines-Ponts

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ où $n \geqslant 2$. Pour $P \in E$, on note :

$$f(P) = P - P'$$

(a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

(b) Montrer de deux manières différentes que f est un automorphisme de E.

(c) Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $Q = f(P)$.
Indication : calculer les dérivées successives de Q.

(d) En déduire la matrice de f^{-1} dans la base canonique.

(e) f est-elle diagonalisable ?

(f) ...

L'examinateur laissait des temps de réflexion avant de donner des indications pour avancer. Il me laissait le choix du temps dont j'avais besoin pour ces réflexions.

Corrigé

601.17

Mines-Ponts

Déterminer la limite, pour $n \to +\infty$, de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\left(x+\frac{1}{2}\right)^n}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$$

Corrigé

601.18

Mines-Ponts

Soit X_1 et X_2 deux v.a. à valeurs dans $\mathbb{C}$.

(a) Rappeler la définition de « X_1 et X_2 sont indépendantes ».

Dans la suite de l'exercice, on suppose qu'elles le sont. Pour $k = 1, 2$, on note $U_k = \mathrm{Re}(X_k)$ et $V_k = \mathrm{Im}(X_k)$.

(b) En précisant le théorème utilisé, montrer que :

- U_1 et U_2 sont indépendantes.
- V_1 et V_2 sont indépendantes.
- U_1 et V_2 sont indépendantes.
- V_1 et U_2 sont indépendantes.

On définit deux méthodes :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &: \exists E(\mathrm{Re}(X)), \exists E(\mathrm{Im}(X)) \\ \mathcal{M}_2 &: \exists E(|X|) \end{aligned}$$

(c) Montrer que $\mathcal{M}_1 \iff \mathcal{M}_2$.

(d) On pose $E(X_k) = E(U_k) + \mathrm{i}E(V_k)$. Montrer que $E(X_1 X_2) = E(X_1) \cdot E(X_2)$.

Examinateur très sympathique qui m'aidait même trop : en donnant un indice, il n'arrivait plus à s'arrêter et donnait tout le raisonnement jusqu'à la solution sans que j'ai le temps de parler.

Corrigé

601.19

Centrale 1

(a) Démontrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2 \mathrm{d}t$.

(b) On considère $(a_n)_n$ une suite telle que $a_n > 0$ pour tout n, et $\sum a_n$ converge. On note :

$$u_n : \begin{array}{rcl}]0,2\pi[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{a_n}{2\pi n}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2 \end{array}$$

Montrer que $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$ existe. Est-ce que f est continue ?

(c) Calculer, pour $n > 0$, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)^2 \mathrm{d}t$. En déduire l'existence de $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Examinateur sympa, mais l'oral était super bizarre : il était 17h, à chaque fois que j'avais un petit problème, il m'aidait et au final on a fini avec 5 minutes d'avance. Mais il a été cool, j'ai eu 19/20 même si j'ai fait des erreurs de calcul.

Corrigé

601.20

Centrale 1

(a) On considère la famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ telle que :

$$L_k(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a1. Écrire L_k sous forme factorisée.

a2. Exprimer a_n^k, le coefficient dominant de L_k, avec des factorielles.

(b) Écrire de deux façons l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\},\ P(k) = k^n$$

(c) Simplifier l'expression : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^n(-1)^{n-k}$.

Examinateur très sympathique qui aide si on patauge.

Corrigé

601.21

Mines-Ponts

Pour $n \geqslant 1$, on pose :

$$f_n(x) = x^{3n} - 3nx + 1$$

(a) Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]1,2[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

(b) On note $\varepsilon_n = x_n - 1$. Montrer la convergence de $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$.

(c) Donner un équivalent de ε_n.

(d) Donner un développement asymptotique de x_n avec 3 termes.

Corrigé

601.22

Mines-Ponts

On considère une urne contenant N boules blanches et aucune noire. On effectue des tirages successifs. À chaque tirage, on remplace la boule tirée par une boule de l'autre couleur. On note X_n le nombre de boules noires à l'issue du n-ième tirage.

(a) Donner les lois de X_0, X_1, X_2.

(b) Montrer que $E(X_{n+1}) = 1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right) E(X_n)$. Je ne suis pas sûr de la formule.

(c) Encore deux questions non traitées.
On peut demander : Déterminer la limite de $E(X_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

Corrigé

601.23

Mines-Télécom

On dispose d'une pièce équilibrée et d'une urne contenant une boule blanche. On répète l'opération suivante :

- si on fait face, on ajoute une boule noire dans l'urne ;
- si on fait pile, on tire une boule dans l'urne et on arrête les tirages.

On note X la v.a. du rang d'arrêt de l'expérience.

(a) Déterminer la loi de X.

(b) Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche après le dernier lancer ?

Corrigé

601.24

cc-INP

On note E l'ensemble des fonctions f continues sur $]0,1]$, telles que $f(t) \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t}\right)$.

(a) Montrer que :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)t^2 \,\mathrm{d}t$$

définit sur E un produit scalaire.

(b) Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)t^n \,\mathrm{d}t$.

(c) On note F l'ensemble des fonctions affines sur $]0,1]$: $F = \{x \mapsto ax+b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$.
Déterminer le projeté orthogonal de $x \mapsto x\ln x$ sur F.

(d) Calculer $\underset{a,b\in\mathbb{R}}{\mathrm{Inf}}\{\|x \mapsto x\ln(x) - ax - b\|\}$.

Examinatrice sympa avec la personne avant moi, mais beaucoup moins avec moi. N'aide pas et fait douter.

Corrigé

601.25

Mines-Ponts

On note E l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et, pour $f \in E$, $K(f)$ le plus petit $k \in \mathbb{R}_+$ tel que f soit k-lipschitzienne.

(a) Montrer que E est un espace vectoriel.

(b) Montrer l'existence de $K(f)$.

(c) Montrer que toutes les fonctions polynomiales sont des éléments de E, et donner $K(P)$.

(d) L'application $K : E \to \mathbb{R}_+$ vérifie-t-elle les axiomes d'une norme ?

(e) Non traitée, il y avait une inégalité à montrer puis montrer que $\frac{K(f)}{\|f\|_\infty}$ ou quelque chose comme ça divergeait.
On peut proposer : On considère maintenant que E est l'ensemble des fonctions lipschitzienne sur $[0,1]$ qui s'annullent en 0. Comparer $\|\cdot\|_\infty$ et K. Sont-elles équivalentes ?

Corrigé

601.26

Mines-Ponts

Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que :

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) AB est-elle diagonalisable ?

(b) Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker}(BA - 9I_2)$?

(c) Que dire de BA ?

Corrigé

601.27

cc-INP

Soit φ continue sur $I = [-a, a]$ telle qu'il existe $c > 0$ telle que, pour tout $x \in I$:

$$|\varphi(x)| \leqslant c|x|$$

On cherche f continue en 0, telle que $f(0) = 0$, et :

$$\forall x \in I,\ f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x) \quad (E)$$

(a) Établir la convergence et la continuité sur I de $\sum \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

(b) Est-ce que sa somme est solution de (E) ?

(c) Montrer que la différence de deux solutions est nulle.

(d) En déduire l'ensemble des solutions.

(e) On suppose que φ est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est dérivable.

Examinatrice sympathique qui laisse avancer de qui demande si on veut retravailler sur une question ou avoir une indication.
Ne pas hésiter à répéter ses justifications car les examinateurs font d'autres choses en même temps (évaluation, lecture du journal, shopping sur internet...).
Ne pas se laisser impressionner par ces comportements atypiques, qui diffèrent d'un candidat à l'autre.

Corrigé

601.28

cc-INP

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \geqslant 3$, telle que :

$$A^3 + 9A = 0 \quad (1)$$

(a) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, 3\mathrm{i}, -3\mathrm{i}\}$.

(b) Est-ce que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

(c) Est-ce que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

(d) Montrer que, si n est impair, A n'est pas inversible.

(e) Montrer qu'il n'existe pas $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant (1).

(f) *Question bonus :* dans le cas où n est pair, donner une matrice A vérifiant (1).

Premier oral, donc je ne savais pas très bien comment parler. Il se peut que j'ai été un peu relaché, comme en colle, mais ça n'a pas eu l'air de l'avoir dérangé.

Corrigé

601.29

Mines-Ponts

On considère la suite $(a_n)_n$ définie par :

$$a_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$$

(a) Justifier l'existence et la convergence de la suite $(a_n)_n$.

(b) On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$. Déterminer son rayon de convergence, noté R.

(c) Étudier la convergence de la série pour $x = -R$.

(d) Donner un équivalent de a_n, pour $n \to +\infty$.

(e) *Une autre question non traitée.*

Corrigé

601.30

Mines-Ponts

On considère des v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes N, $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$. dont les X_i sont toutes de même loi. Pour $\omega \in \Omega$, on pose :

$$Y(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$$

(a) Montrer que Y est une v.a.

(b) Calculer l'expérance de Y en fonction de $E(X)$ et $E(N)$, en justifiant son existence.

Corrigé

601.31

cc-INP

Soit X, Y deux v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, et $p \in]0,1[$, telles que :

$$P(X=k, Y=n) = \begin{cases} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Déterminer la loi de Y.

(b) Donner le developpement en série entière de $\frac{1}{1-x}$. Montrer que :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

et en déduire la loi de X.

(c) Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

Corrigé

601.32

Mines-Télécom

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(n+x)}{\sqrt{x}(n+x)} \, \mathrm{d}x$$

(a) Montrer que I_n est bien définie.

(b) Déterminer la limite de I_n lorsque $n \to +\infty$.

(c) En posant $t = \sqrt{x}$, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \, \mathrm{d}x$.

(d) *Non traitée.*

Corrigé

601.33

Centrale 1

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

(a) Justifier l'existence de I_n pour tout n.

(b) Démontrer que, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin t \geqslant \dfrac{2}{\pi} t$.

(c) Démontrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{I_n}{n} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \mathrm{d}u$$

(d) *Une autre question non traitée.*

Corrigé

601.34

Mines-Ponts

Soit E un espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E.

(a) Montrer que toute valeur propre non nulle de $f \circ g$ est valeur propre de $g \circ f$.

(b) Montrer que, si E est de dimension finie, toute valeur propre de $f \circ g$ est valeur propre de $g \circ f$.

(c) Soit $E = \mathbb{R}[X]$, $f \,:\, P \mapsto XP$ et $g \,:\, P \mapsto P'$. O est-elle valeur propre de $f \circ g$? de $g \circ f$? Qu'en conclure ?

Corrigé

601.35

cc-INP

On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0 \quad (H)$$

On cherche les solutions développables en séries entières sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on note r le rayon de convergence.

(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et donner f' et f''.

(b) Déterminer $(b_n)_n$ telle que :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n$$

(c) Déterminer une relation de récurrence satisfaite par $(a_n)_n$.

(d) *Question non traitée.*
On peut demander : Expliciter les solutions de (H) qui sont développables en série entière et préciser le rayon de convergence.
Résoudre (H) par la méthode de Lagrange.

Corrigé

601.36

cc-INP

On fixe $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on note :

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$$

(a) À quelle(s) condition(s) définit-on ainsi un produit scalaire ?

On note $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\}$.

(b) Déterminer l'orthogonal de F.

(c) Quelle est la distance de X^n à F ?

Corrigé

601.37

Mines-Ponts

On considère :

$$S\ :\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right)$$

(a) Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$S(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln(2)x$$

(c) Montrer que $S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Examinateur très sympa qui parle beaucoup pour mettre en confiance. Il m'avait prévenu que la dernière question était difficile et m'a bien aidé à la faire.

Corrigé

601.38

Centrale 1

(a) Soit M, N deux matrices carrées complexes semblables et $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(M)$ est semblable à $P(N)$.

(b) Soit $(B_n)_n$ une suite de matrices qui converge vers B. On suppose que, pour tout n, B_n est semblable à A et que A est diagonalisable. Montrer que B est semblable à A.

(c) Est-ce toujours vrai si A n'est pas diagonalisable ?

Corrigé

601.39

Mines-Télécom

Soit (U, V) un couple de v.a. indépendantes et suivant la même loi binomiale de paramètres $(2, 1/2)$.

(a) Soit $T = (U-1)^2 + (V-1)^2$. Donner la loi de T.

(b) Soit $S = (U-1)(T-1) + 1$.

b1. Calculer $E(T(S-1))$.

b2. Donner la loi de S.

b3. Calculer $\mathrm{Cov}(S, T)$.

b4. S et T sont-elles indépendantes ?

Examinateur sympathique, qui donne des indications assez rapidement et m'a donné la loi de S après m'avoir demandé la méthode, pour pouvoir finir l'exo.

Corrigé

601.40

cc-INP

(a) Chercher u, solution polynomiale de l'équation différentielle :

$$(E_0)\ :\ x^2y'' - 2y = 0$$

(b) En posant $y(x) = u(x)z(x)$, déterminer une autre solution de (E_0) sur $\mathbb{R}^*$.

(c) Résoudre sur $\mathbb{R}^*$:

$$(E)\ :\ x^2y'' - 2y = x^3$$

(d) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

601.41

Centrale 1

On considère :

$$F\ :\ x \mapsto \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que F est développable en série entière, et donner son développement.

(b) Montrer que :

$$\mathrm{Re}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(\mathrm{i}x\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t\right) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$$

(c) Donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Corrigé

601.42

Mines-Ponts

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $ABAB = 0$. Est-ce que $BABA = 0$?

Corrigé

601.43

Mines-Ponts

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ bornée et :

$$L \ : \ x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que L est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que $L(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

(c) Donner un équivalent de $L(x)$ au voisinage de $x \to +\infty$, dans le cas où $f(0) \neq 0$.

(d) On suppose dans cette question l'existence de $L(0)$. Montrer que L est continue en 0.

(e) *Question oubliée.*

Examinateur qui laisse faire si on y arrive et qui aide si on bloque un peu.

Corrigé

601.44

Centrale 1

Soient n et N des entiers tels que $1 \leqslant n \leqslant N$.
Soit une urne contenant N boules numérotées de 1 à N.
On tire de manière simultanée et uniforme n boules.
On note X la variable aléatoire donnant le plus grand numéro de boule obtenu.

(a) Déterminer la loi de X.

(b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}$.

(c) En déduire $E(X)$.

Corrigé

601.45

cc-INP

Pour n entier, on pose :

$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que $(a_n)_n$ converge, et déterminer sa limite.

(b) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ existe.

(c) On étudie $\sum a_n x^n$ et on note R le rayon de convergence.

c1. Montrer que, pour tout n, $a_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

c2. En déduire la valeur de R.

c3. Montrer que, pour tout n, $(2n+3)a_{n+1} = 1 + (n+1)a_n$.

c4. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 dont $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution.

(d) *Questions bonus :* comment résoudre l'équation différentielle ? Le faire.

Beaucoup de calculs : mon tableau était répugnant, surtout au moment de trouver l'équadiff. Examinatrice qui aide beaucoup lorsque l'on bloque. Elle était très bavarde.

Corrigé

601.46

Mines Télécom

Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Examinateur très agréable et souriant. Il n'hésitait pas à me confirmer mes idées. J'ai tiré au sort mon sujet.

Corrigé

601.47

Mines-Ponts

On nous donne, en bas du sujet, le théorème de Weierstrass.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, $f\ :\ E \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$, c'est-à-dire :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists R \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ \|x\| \geqslant R \implies f(x) \geqslant A$$

(a) Montrer qu'il existe R tel que :

$$\operatorname{Inf}\{f(x), x \in E\} = \operatorname{Inf}\{f(x),\ \|x\| \leqslant R\}$$

On pourra utiliser $A = f(0)$ et le R associé.

(b) Montrer que f admet un minimum sur E.

(c) Soit $f\ :\ [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée (mais pas nécessairement continue) et $F = \mathbb{R}_n[X]$.

c1. Montrer qu'il existe $P_n \in F$ tel que $\|f - P_n\|_\infty$ est minimale.

c2. Quelle hypothèse pour avoir la convergence uniforme de $(P_n)_n$ vers f ?

Conditions spéciales car je n'avais plus de voix pendant les Mines, donc j'ai chuchoté pendant tout l'oral. L'examinateur a été gentil et s'est rapproché pour que je ne force pas. Sinon, examinateur plutôt présent dans l'oral, et qui laisse le temps de réfléchir et de faire un raisonnement complet.

Corrigé

601.48

Centrale 1

On note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. Pour f endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on note :

$$I(f) = \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \text{ et } K(f) = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$$

(a) On suppose $f \in O(\mathbb{R}^n)$ et F sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer l'équivalence :

$$F \text{ est stable par } f \iff F^\perp \text{ est stable par } f$$

Question supplémentaire : que dire ici de $(F^\perp)^\perp$?

(b) On suppose $f \in O(\mathbb{R}^n)$. Montre que $K(f)$ et $I(f)$ sont supplémentaires orthogonaux.

(c) Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille libre de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On note $s_{\vec{u}_i}$ la réflexion par rapport à l'hyperplan $H_{\vec{u}_i} = \big(\operatorname{Vect}(\vec{u}_i)\big)^\perp$. Montrer que :

$$I(s_{\vec{u}_1} \circ \cdots \circ s_{\vec{u}_p}) = \operatorname{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$$

Indication : récurrence et passage à l'orthogonal.

Examinatrice très sévère de visage. Elle m'a tendu la main en arrivant, donc j'ai paniqué et j'ai voulu lui serrer la main : elle voulait juste la convocation... Au final, j'ai plutôt bien réussi l'exercice donc elle n'a presque pas parlé de l'interrogation, sauf pour donner de petites indications.

Corrigé

601.49

Mines-Ponts

On considère :

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{k}{k+1}\right)^n \text{ et } v_n = \int_2^n \left(1 - \frac{1}{u}\right)^n \mathrm{d}u$$

(a) Montrer que $v_n \sim n \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{u}}\,\mathrm{d}u$.

(b) Trouver un équivalent de u_n.

Corrigé

601.50

Mines-Ponts

Soit $n \geqslant 2$ et $f : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^\top \end{array}$.

(a) Déterminer χ_f avec le minimum de calcul possible.

(b) b1. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha f + \beta \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = 0$. Montrer que $\alpha = \beta = 0$.
b2. Déterminer $\{P \in \mathbb{R}[X],\ P(f) = 0\}$.

(c) On pose $S = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Pour g endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :

$$f \circ g = g \circ f \iff \begin{cases} g(S) \subset S \\ g(A) \subset A \end{cases}$$

Corrigé

601.51

cc-INP

On a une pièce qu'on lance plusieurs fois. On note X la v.a. associée au rang pour lequel on a la séquence « pile, face » pour la première fois. On note Y la v.a. associée au rang du premier « pile ».

(a) Trouver la loi conjointe de (X, Y).

(b) Donner la loi de X.

(c) Calculer $E(X)$.

Corrigé

601.52

cc-INP

On note, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n(x) = \frac{\ln(1 + n^2x^2)}{n^2 \ln(1 + n)}$$

(a) Déterminer le domaine D de convergence de $\sum u_n$.

Pour $x \in D$, on note $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

(b) Montrer que S est continue sur D.

(c) Étudier la convergence uniforme de $\sum u_n'$.

(d) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

Examinateur qui reste neutre, mais qui montre le droit chemin si l'on s'écarte trop.

Corrigé

601.53

cc-INP

Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi $\mathscr{B}(p)$. On note $Y_n = \frac{1}{2}(X_n + X_{n+1})$.

(a) Énoncer la loi faible des grands nombres.

(b) Les Y_n sont-ils indépendants ?

(c) On note $M_n = \dfrac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n}$. Calculer $E(M_n)$ et $V(M_n)$.

(d) *Question non traitée, il fallait montrer une inégalité biscornue.*
Sans doute : Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(|M_n - p| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{p(1-p)(2n-1)}{2n^2\varepsilon^2}$.

Corrigé

601.54

cc-INP

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$f_n(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^n(x)}$$

(a) Justifier que f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Montrer la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Donner sa limite.

(c) Déterminer la nature de $\sum(-1)^n I_n$ et de $\sum I_n$.
Indication : on pourra montrer que, pour $x \geqslant 0$, $\operatorname{ch} x \leqslant \mathrm{e}^x$.

(d) Quel est le rayon de convergence de $\sum I_n x^n$?

Examinateur bavard avec lequel j'ai pu dialoguer. Ça m'a mis en confiance durant l'exercice.

Corrigé

601.55

Centrale 1

(a) On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_n$ la suite de fonctions définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} u_0(x) = \alpha \\ u_{n+1}(x) = \alpha + \displaystyle\int_0^x f(u_n(t))\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

a1. Montrer qu'il existe M tel que, pour tout x :

$$|u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leqslant \frac{k^n |x|^{n+1} M}{n!}$$

a2. En déduire que $(u_n)_n$ converge simplement vers une fonction u dérivable telle que :

$$u'(x) = f(u(x))$$

(b) *question non traitée.*

Examinateur qui donne des indications mais qui semble fatigué d'écouter des candidats pour le dernier jour de la série 4.

Corrigé

601.56

Centrale 1

Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit ϕ_A par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \phi_A(M) = AM - MA$$

(a) Montrer que ϕ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il n'est pas injectif.
Déterminer le rang de ϕ_A, où :

$$A = \mathrm{Diag}(1, 2, \dots, n-1, n)$$

(b) Soit $\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\ B & \mapsto & \phi_B \end{array}$
Montrer que ϕ est linéaire. Déterminer son rang et son noyau.

(c) *Une question non traitée.*

Examinateur passif. Il a parlé deux fois tout au plus, pour ne rien dire. C'était un peu déroutant.

Corrigé

601.57

Mines Télécom

On note $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} \mathrm{e}^{-nx}$.

(a) Donner le domaine de définition de f.

(b) Montrer que f est continue sur son domaine de définition.

(c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

(d) Étudier la limite de f en $+\infty$.

(e) Donner les variations de f.

Corrigé

601.58

Mines Télécom

Soit u un endomorphisme bijectif de E espace vectoriel de dimension n, et M sa matrice dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.

(a) Montrer que $M^\top M$ est symétrique et que ses valeurs propres sont strictement positives.

(b) D'autres questions que je n'ai pas faites.

Corrigé

601.59

Mines-Télécom

On lance simultanément n boules identiques qui viennent se loger dans trois urnes. On note X la v.a. du nombre d'urnes restées vides après le lancer.

(a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

(b) Que vaut $P(X = 2)$?

(c) Déterminer la loi de X.

(d) Calculer $E(X)$.

(e) Encore une question sur une limite d'espérance.
Sans doute : Limite de l'espérance lorsque $n \to +\infty$ et interprétation.

Corrigé

601.60

cc-INP

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

(a) Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que :

$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} + P(0) \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$$

(b) Donner le rang de B en fonction du rang de A.

(c) On suppose que A est diagonalisable. Montrer que B est aussi diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Corrigé

601.61

cc-INP

Soit $(a_n)_n$ la suite définie par :

$$a_0 = -4,\ a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$$

(a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $|a_n| \leqslant 2^{n+1}$.

(b) En déduire que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est non nul.

(c) c1. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que :

$$S(x) = ...$$

fraction en x, je ne me souviens plus des coefficients.

c2. Montrer qu'il existe trois constantes a, b, c telles que :

$$S(x) = -1 + \frac{a}{1+x} + \frac{b}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-x}$$

(d) Donner l'expression de a_n en fonction de n.

Examinateur très silencieux, mais souriant. Il m'a donné quelques indications lorsque j'étais bloquée, mais semblait content lorsque je corrigeais mes erreurs moi-même. Après 18 minutes, il m'a laissé le choix entre continuer le premier exercice ou passer au second.

Corrigé

601.62

cc-INP

Soit E un espace préhilbertien, u une isométrie vectorielle et $v = \mathrm{Id}_E - u$.

(a) Montrer que $\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Im} v)^\perp$.

(b) Soit $x \in \operatorname{Im} v$. Montrer qu'il existe $y \in E$ tel que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x) = \frac{1}{n}(y - u^n(y))$$

En déduire que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(c) Soit p le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Ker} v$. Montrer que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} p(x)$$

(d) Et des questions sur les projecteurs que je n'ai pas faites.

Examinateur gentil, il donnait des pistes lorsque je bloquais.

Corrigé

601.63

Mines Télécom

Soit $(u_n)_n$ une suite de limite nulle.

(a) Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{u_n}{n!}x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

(b) Pour $(u_n)_n$ suite réelle, on note :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}x^n \text{ et } g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{U_n}{n!}x^n \text{ avec } U_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$$

Montrer que :

$$g'(x)=f'(x)+g(x)$$

(c) Sans calculer l'intégrale, montrer que :

$$\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-x}(g(x)-f(x))$$

(d) *Une autre question que je n'ai pas faite.*
Sans doute : On suppose que $\sum u_n$ converge, et on note ℓ sa somme. Montrer que $\mathrm{e}^{-x}g(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ell$.

Examinateur un peu froid qui sortait parfois dans le couloir. Un peu perturbant.

Corrigé

601.64

cc-INP

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et, pour $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f_A(M)=AM$.

(a) Montrer que f_A est un endomorphisme.

(b) Montrer que, si $A^2=A$, alors f_A est un projecteur.

(c) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A est diagonalisable.
Indication : $f_A^k=f_{A^k}$.

(d) Écrire une matrice propre de f_A à partir d'un vecteur propre de A.

(e) Écrire un vecteur propre de A à partir d'une matrice propre de f_A.

(f) En déduire que $\mathrm{Sp}(f_A)=\mathrm{Sp}(A)$.

Examinateur pas très bavard, mais qui pose des questions intermédiaires pour faire avancer.

Corrigé

601.65

Mines-Ponts

On considère :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x + \mathrm{e}^t} \, \mathrm{d}t$$

(a) Montrer que f est définie sur $]-\alpha, \alpha[$ avec $\alpha > 0$ à déterminer.

(b) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

(c) Calculer ce développement et exprimer f.

Examinateur qui aide beaucoup et crée le dialogue pour aider dans le raisonnement.

Corrigé

601.66

Centrale 1

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
Soit X une variable aléatoire telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)}$.

(a) Déterminer λ.
Déterminer une condition sur α pour que X^α admette une espérance finie et une variance.

(b) Pierre et Marie jouent au jeu suivant : ils tirent un entier $n > 0$ suivant la loi de X.
Si n pair, Pierre donne n euros à Marie, sinon Marie donne n euros à Pierre.

b1. Déterminer la probabilité que Pierre gagne une partie.

b2. Déterminer l'espérance de gain de Pierre.

Corrigé

601.67

Mines-Ponts

On considère :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

(a) Trouver le domaine de définition de f.

(b) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et trouver une expression simple de $f'(x)$.

(c) Déterminer $f(x)$.

Corrigé

601.68

Centrale 1

Soient n et N deux entiers non nuls. On réalise n lancers de boules dans des cases numérotées de 1 à N. Les lancers sont indépendants et la probabilité qu'une boule atterrisse dans la case k est de $\dfrac{1}{N}$.
On note T_n la variable comptant le nombre de cases non vides au bout de n lancers.

(a) Donner les valeurs prises par T_n en fonction de n et de N.

(b) Montrer que $\forall k \geqslant 1,\ P(T_{n+1}=k) = \dfrac{k}{N}P(T_n=k) + \dfrac{N-k+1}{N}P(T_n=k-1)$.

(c) Justifier que T_n admet une espérance finie et la calculer.
Indication : passer par la fonction génératrice de T_{n+1}

Corrigé

601.69

Mines-Ponts

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$:

$$Q_p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x \\ 1 & 2 & \dots & 0 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \binom{p}{1} & \dots & \binom{p}{p-1} & x^p \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \dots & \binom{p+1}{p-1} & x^{p+1} \end{vmatrix}$$

(a) Déterminer $Q_p(x+1) - Q_p(x)$.

(b) Prouver que $Q_p(n+1) = (p+1)! \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$.

(c) Retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Corrigé

601.70

Soit $\alpha > 0$.

(a) Montrer l'existence d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall t \in [0,1],\ G_X(t) = \frac{1}{(2-t)^\alpha}$$

(b) Soit $\lambda > 0$. Montrer que $P(X \geqslant \lambda + \alpha) \leqslant \dfrac{2\alpha}{\lambda^2}$.

Corrigé

601.71

cc-INP

Pour $x \in]0,1[$, on note :

$$f_n(x) = \frac{x^{2n+1}\ln(x)}{x^2-1} \text{ et } I_n = \int_0^1 f_n$$

(a) Montrer que f_n est intégrable sur $]0,1[$.

(b) Trouver la limite de I_n.

(c) Montrer que $I_n = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

(d) *Encore une question que je n'ai pas faite.*

Interrogateur un peu sec, mais aidant avec de bonnes indications. Il demande des résultats à démontrer en dehors des questions.

Corrigé

601.72

Mines-Télécom

Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel, et :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que A est diagonalisable, sans calcul.

(b) Donner $\mathrm{rg}(A)$ et en déduire que 0 est valeur propre de A. Déterminer sans calcul la dimension et une base de $E_0(A)$.

(c) Donner A^2 puis $\mathrm{Sp}(A)$ en utilisant $\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}(A^2)$.

(d) Donner une base des sous-espaces propres pour les valeurs propres non nulles.

(e) On pose, pour $k \in \{3,\ldots,n\}$:

$$\varepsilon_k = \sum_{i=2}^{k-1} e_i - (k-2)e_k$$

Montrer que les ε_k forment une base orthogonale de $\mathrm{E}_0(A)$.

(f) En déduire une base orthonormale de vecteurs propres de A.

Corrigé

601.73

cc-INP

On note $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f.

(b) Déterminer le domaine de dérivabilité de f.

(c) Donner un équivalent en 1^-.
Indication : comparaison série-intégrale.

On donne $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Corrigé

601.74

cc-INP

Soit $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note :

$$f(x) = x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v$$

(a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

(b) Pour $y \in \mathbb{R}^n$, montrer que : $y \in \operatorname{Im} f \iff f(y) = y$.

(c) Montrer que $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^n$.
Que peut-on en déduire pour f ?

(d) L'exercice se poursuit par des questions sur les éléments propres de f.
Par exemple : Déterminer les éléments propres de f.

Corrigé

601.75

Centrale

Le sujet de cet exercice n'est pas correct. Comment est quantifié x ? Les f_n ne sont pas dans W_h. Mais les questions sur la liberté et sur la dimension sont intéressantes.

On note E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et, pour $h > 0$:

$$W_h = \left\{ f \in E,\ \int_{x+h}^{x+2h} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{x}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \right\}$$

(a) Montrer que W_h est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(b) b1. On note $f_n(t) = \cos\left(\frac{2\pi n}{h}t\right)$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille libre de W_h.

b2. En déduire la dimension de W_h.

(c) Existe-t-il des fonctions non bornées dans W_h ?

(d) Question non traitée.

Examinateur bienveillant, calme malgré le fait que je mette du temps à avancer. Il m'a posé des questions de cours pour finir : théorème fondamental de l'analyse, dérivée de $\int_{x+h}^{x+2h} f(t)\,\mathrm{d}t$ par rapport à x puis à h.

Corrigé

601.76

Mines-Ponts

Soit $\sum w_n$ une série absolument convergente. On considère $(u_n)_n$ définie par u_0 et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + w_n$$

(a) Montrer que $\sum \frac{\lambda}{n} + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge absolument.

(b) En déduire que la suite $(n^\lambda u_n)_n$ converge.

(c) Pas fait

Corrigé

601.77

Centrale

On se place dans $\mathcal{M}_{2p+1}(\mathbb{R})$ et, pour des colonnes X, Y, on note $\langle X, Y\rangle = X^\top Y$.
On considère $A \in O_{2p+1}(\mathbb{R})$ et on note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2p+1})$ l'application canoniquement associée à A.

(a) a1. Montrer que $|\det A| = 1$.
Monter qu'il existe une valeur propre réelle, λ_0.
Montrer que $\lambda_0^2 = 1$.

a2. Montrer qu'il existe une droite vectorielle stable par f.
Montrer qu'il existe un hyperplan stable par f.

(b) On note $B = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$.
Montrer que $B^6 = I_3$.

(c) Je n'ai pas traité la suite.

L'examinateur était très présent. Même trop. Il ne me laissait pas le temps de réfléchir. Ça va coûter cher pour la note.

Corrigé

601.78

Mines-Ponts

Il y a n caisses dans un supermarché. Il y a np clients qui choisissent tous une caisse de manière équiprobable et indépendante.
Soit X_i le nombre de clients qui choisissent la caisse i.

(a) Exprimer X_i comme somme de variables aléatoires indépendantes. En déduire la loi, l'espérance et la variance de X_i.

(b) En considérant la variance de $Y = X_1 + \ldots + X_n$, calculer la covariance de (X_i, X_j) pour tous i, j.

Corrigé

601.79

cc-INP

Soit $n \geqslant 2$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$AB - BA = A$$

Pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $f(X) = XB - BX$.

(a) Montrer que f est un endomorphisme.

(b) Calculer $\operatorname{tr}(A)$ et $\operatorname{tr}(A^k)$ pour k entier naturel.

(c) Montrer que $f(A^k) = kA^k$.

(d) En déduire que A est nilpotente.

La définition de nilpotente était rappelée.

Corrigé

601.80

Ensea

Déterminer le rayon de convergence et le domaine de convergence de :

$$\sum_{n \geqslant 2} \ln\left(\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) x^n$$

Corrigé

601.81

Mines-Ponts

Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$M(M-I_n)^3 = 0 \text{ et } \operatorname{tr}(M) = 0$$

Corrigé

601.82

Mines-Ponts

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x+y) - f(x) - f(y)| \leqslant M$

(a) Si $M = 0$, montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha x$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $v_n(x) = \dfrac{f(2^n x)}{2^n}$.
En considérant la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$, montrer que (v_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue g.

(c) Montrer que g est la seule application linéaire telle que la fonction $f - g$ soit bornée sur $\mathbb{R}$.