1 Exercices de niveau 1

611.1

Mines-Télécom

Montrer que l'application qui à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa transposée est une symétrie par rapport à F de direction G, déterminer F et G, ainsi que leurs dimensions.

L'examinateur m'a demandé de redémontrer les dimensions de $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$. Il ne m'a donné aucune indication car je lui ai donné toutes les « bonnes » idées.

611.2

Mines-Télécom

Soit E un ev de dimension $n \geqslant 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe p entier tel que $u^p = 0$.

(a) Montrer que, pour tout k, il existe F_k un sous-ev de E tel que : $\mathrm{Ker}(u^k) = \mathrm{Ker}(u^{k-1}) \oplus F_k$

(b) Montrer par récurrence que $\mathrm{Ker}(u^k) = F_1 + \cdots + F_k$.

(c) Montrer que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

611.3

cc-INP

On note E_{ij} les matrices formant la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Rappeler la définition d'un projecteur.

(b) Donner l'ensemble des E_{ij} qui sont matrices d'un projecteur.

(c) Montrer que toutes les matrices diagonalisables se décomposent comme combinaison linéaire de matrices de projecteurs.

(d) Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont des matrices de projecteurs.

(e) Est-ce que toute combinaison linéaire de matrices de projecteurs est diagonalisable ?

Examinatrice très discrète, qui n'a pas parlé de l'oral. Elle m'a rajouté une question après les deux exercices : est-ce que tout endomorphisme de E (pas forcément diagonalisable) est combinaison linéaire de projecteurs ?

611.4

cc-INP

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, tel que : $u^3 = \dfrac{1}{3}(u^2 + u + \mathrm{id})$

(a) Montrer que u est bijective.

(b) Montrer que toute puissance de u est combinaison linéaire de (u^2, u, id).

(c) L'endomorphisme u peut-il être diagonalisable ? non diagonalisable ?

(d) Que se passe-t-il si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

611.5

Mines-Télécom

On note : $D_n = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & -2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 6 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -2 \\ 0 & \dots & 0 & n(n-1) & n \end{vmatrix}$

(a) Donner une relation d'ordre 2 vérifiée par D_n.

(b) Trouver les solutions de cette relation.

L'examinateur ne parlait vraiment pas beaucoup.

611.6

cc-INP

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $(A + A^\top)^k = 0$.

(a) Montrer que $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que ce n'est pas vrai si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

611.7

cc-INP

Soit f un endomorphisme de E ($\mathbb{R}$-ev) tel que $f^3 - f^2 + f - \mathrm{id}_E = 0 \star$
f est-il bijectif (E de dimension quelconque) ?
En dimension finie, trouver les f qui vérifient $\star$ et qui sont diagonalisables.

611.8

cc-INP

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $A = XY^\top$ et $B = A - I_n$.

(a) Trouver un polynôme annulateur de A.

(b) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour avoir B inversible.

2 Exercices de niveau 2

611.9

Centrale 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle, où $n \geqslant 2$.

(a) Montrer que $\mathrm{rg}(A) = 1$ si et seulement s'il existe $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulles telles que $A = XY^\top$.

(b) Soit $A = \Big(\sin(i+j)\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

b1. Déterminer le rang de A.

b2. Montrer qu'il existe $C_1, C_2, D_1, D_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que : $A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {D_1}^\top \\ {D_2}^\top \end{pmatrix}$.

(c) *Une question non traitée.*

L'examinateur était sympathique et confirmait mes étapes de raisonnement en donnant des indications lorsque ceux-ci n'aboutissaient pas. Lorsque je ne précisais pas certaines hypothèses (non nullité par exemple), il demandait si cette hypothèse était nécessaire et me faisait comprendre qu'elle devait être citée.

611.10

Mines-Ponts

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout i : $|a_{ii}| > \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} |a_{ik}|$.

(a) Montrer que A est inversible.

(b) Montrer que les valeurs propres appartiennent aux disques de centre a_{ii} et de rayon $\displaystyle\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} |a_{ik}|$.

L'examinateur laisse faire, ne donne pas d'indication et voulait que je parle quand j'avais fini la question.

611.11

Centrale 1

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

(a) a1. Montrer que $\operatorname{Ker}(u^k) \subset \operatorname{Ker}(u^{k+1})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

a2. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $\dim(\operatorname{Ker}(u^k))$ est constante.

On définit $K_u = \operatorname{Inf}\{k \in \mathbb{N}, \dim(\operatorname{Ker} u^k) = d\}$ où d est cette constante.

(b) b1. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Ker} u^p = \operatorname{Ker} u^{p+1}$. Montrer que, pour tout $k \geqslant p$, $\operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u^p$.

b2. Montrer que $K_u \leqslant n$.

b3. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geqslant K_u$ si et seulement si $\operatorname{Im} u^k$ et $\operatorname{Ker} u^k$ sont supplémentaires. *Pas sûre de la dernière question.*

611.12

Centrale 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & b & -a \\ -b & 0 & c \\ a & -c & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $A^3 = -\alpha A$ où on exprimera α en fonction de a, b, c. Exprimer les puissances de A en fonction de α.

(b) On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$. Montrer que $(S_n)_n$ tend vers une limite S_∞ et déterminer λ et μ réels tels que :

$$S_\infty = I_3 + \lambda A + \mu A^2$$

Examinateur ne disant pas un mot à part qu'il ne faudrait pas faire de calcul quand j'ai fait une erreur sur A^3 et que j'avais dit qu'il y avait sûrement une erreur de calcul. Je lui ai proposé plusieurs méthodes envisageable pour voir s'il y en avait une qui lui plaisait pour ne pas calculer A^3, mais il n'a rien dit donc j'ai calculé bêtement car calculer $\chi_A(X)$ ne fonctionnait pas à coup sûr.

611.13

Centrale 1

Soit E l'ensemble des fonctions polynomiales réelles.

(a) Montrer que, pour $P \in E$, il existe un unique $Q \in E$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ Q(x) = \dfrac{1}{x-1} \displaystyle\int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t$.

(b) On note f l'application qui, à $P \in E$ associe $Q \in E$ défini ci-dessus. Montrer que f est un automorphisme.

(c) Donner les valeurs propres de f^{-1}.

Examinateur très sympa, qui orientait et donnait des indications mais attendait des mots et justifications importantes. J'ai réussi à bien cerner l'exercice dès le départ et donc j'ai pu être assez efficace. La discussion était fluide donc l'oral plutôt agréable.

611.14

Centrale

Soit N la norme définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $N(A) = \operatorname*{Max}_{i,j} |a_{i,j}|$.

On pose $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ avec a, b, c réels.

(a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0 /\ \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N(AB) \leqslant \alpha N(A)N(B)$.

(b) Calculer pour tout k entier T^k.

(c) Montrer que la suite de terme général $M_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{T^k}{k!}$ converge et calculer sa limite.

611.15

Mines-Ponts

Soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto AM$ et $\varphi_B : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto MB$.
À quelle condition a-t-on $\varphi_A = \varphi_B$?

611.16

Mines-Ponts

Soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(M) \in \mathbb{R}^+$.

611.17

Centrale

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leqslant \|x\|$.
On pose : $p_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k$ et on note $F = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id})$ et $G = \operatorname{Im}(u - \mathrm{id})$. On suppose que $E = F \oplus G$ et on désigne par p la projection sur F de direction G.

(a) Montrer que, pour tout $x \in E$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} p_n(x) = p(x)$.

(b) Montrer que p est continue et que G est une partie fermée de E.

611.18

Mines-Ponts

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Soit S un sous-espace vectoriel de E tel que : $\begin{cases} S \text{ est stable par } u \\ E = S + \operatorname{Im} u \end{cases}$ Montrer que $S = E$.

611.19

Mines-Ponts

(a) On pose $K_0 = 0_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $K_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour tout $r \in [\![1, n-1]\!]$.
Montrer que, pour tout $r \in [\![1, n-1]\!]$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $K_r^p = 0_n$.

(b) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ non constante telle que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(AB) = f(A)f(B)$.
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $f(A) = 0$ si et seulement si A n'est pas inversible.

3 Exercices de niveau 3

611.20

X

Soit a réel et $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $R \in \mathbb{R}[X]$ et $Q = R^2 + 1$. Existe-t-il $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $M = Q(A)$?

4 Exercices de la banque CCP MP

On peut travailler les exercices : **59 60 61 64 65 87 90 93**