1 Exercices de niveau 1

612.1

cc-INP

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P \in \mathbb{R}[X]$ et M définie par blocs : $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$

(a) Montrer que, si A est semblable à B, alors $P(A)$ est semblable à $P(B)$.

(b) Calculer M^k.

(c) Exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, A et $P'(A)$.

(d) En déduire que, si M est diagonalisable, A l'est aussi.

(e) Étudier la réciproque lorsque A est inversible.

(f) Montrer que, si A n'est pas inversible et M diagonalisable, alors A est nulle.

Examinatrice sympathique.

612.2

cc-INP

(a) Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.

(b) Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $C \neq 0$ et telles que $AC = CB$.

  b1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k C = CB^k$.
  b2. En déduire que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)C = CP(B)$.
  b3. Montrer que le produit de deux matrices est inversible si et seulement si chaque matrice est inversible, en déduire que A et B ont une valeur propre commune.

(c) La réciproque est-elle vraie ? C'est-à-dire que si A et B ont une valeur propre en commun, existe-t-il une matrice $C \neq 0$ telle que $AC = CB$.

612.3

cc-INP

Soit a, b non nuls et, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $u(M) = aM + bM^\top$

(a) Montrer que u est un endomorphisme.

(b) Chercher un polynôme annulateur de u de degré 2.

(c) Est-ce que u est diagonalisable ? En donner les éléments propres.

(d) Que valent trace et déterminant de u ?

612.4

cc-INP

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée. On note $f_A \,:\, M \mapsto AM$.

(a) Montrer que f_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que, si $A^2 = A$, alors f_A est un projecteur.

(c) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A est diagonalisable.

(d) Exhiber une matrice propre de f_A à partir d'un vecteur propre de A.

(e) Exhiber un vecteur propre de A à partir d'une matrice propre de A.

(f) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f_A)$.

(g) Montrer que A est inversible si et seulement si f_A est bijective.

Examinateur poli, mais manque flagrant de chaleur humaine.

612.5

Mines-Télécom

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

(a) Donner le rang de B en fonction de celui de A.

(b) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$: $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0) \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$

(c) Montre que, si B est diagonalisable, alors A est diagonalisable.

(d) Que penser de la réciproque ?

612.6

Mines-Télécom

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Est-ce que A est diagonalisable ?

(b) Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$.

612.7

cc-INP

On considère :

$$(E)\ :\ Y'(t) = A(t)Y(t)$$

d'inconnue $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et où $A(t) = \begin{pmatrix} 2-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix}$.

(a) Trouver les vecteurs propres de $A(t)$.

(b) En déduire qu'il existe P inversible telle que $P^{-1}A(t)P$ soit diagonale.

(c) Résoudre E.

612.8

Mines-Télécom

Soit E un espace vectoriel, $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on note :

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}(u \circ s + s \circ u)$$

(a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

(b) Calculer $\varphi^3(u)$. En déduire un polynôme annulateur de φ.

(c) Est-ce que φ est diagonalisable ?

Examinateur sympathique qui laisse dérouler l'exercice sans trop poser de quetsion et donne des indices si besoin.

612.9

cc-INP

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

(a) Montrer que u diagonalisable $\implies$ u^2 diagonalisable.

(b) Montrer que u^2 diagonalisable $\not\Longrightarrow$ u diagonalisable en utilisant un contrexemple.

(c) Montrer que $\mathrm{Ker}(u^2 - \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$.

(d) Montrer que, si u est bijectif, u^2 diagonalisable $\implies$ u diagonalisable.

L'examinateur était cool, attentif et posait pas mal de questions.

612.10

cc-INP

Soit $E = \mathcal{C}([0, +\infty[)$ et $T \,:\, f \in E \mapsto g$ telle que $\begin{cases} g(0) = f(0) \\ \forall x > 0,\ g(x) = T(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \end{cases}$

(a) Montrer que T est linéaire.

(b) Montrer que $T(f)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x > 0,\ xT(f)'(x) + T(f)(x) = f(x)$.

(c) c1. Montrer que $T(f)$ est continue en 0. En déduire que T est un endomorphisme de E.
c2. En déduire que 0 n'est pas valeur propre de T.

(d) Soit λ une valeur propre de T, de vecteur propre associé f : montrer que f est solution d'une équation différentielle du 1er ordre que l'on déterminera.

(e) Déterminer les valeurs propres de T.

612.11

cc-INP

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, non nulle ; soit $\varphi \,:\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}\,(M)A - M$. (On admet que c'est un endomorphisme)
Soit $P = X^2 + (2 - \mathrm{tr}\,(A))X + (1 - \mathrm{tr}\,(A))$.

(a) Montrer que P est annulateur de φ.

(b) φ est-il diagonalisable ?

(c) Déterminer les valeurs propres de φ.

612.12

cc-INP

Étude des solutions de l'équation $M^2 + M = A$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Donner les solutions dans $\mathbb{R}$ de $x^2 + x - 6 = 0$ et $x^2 + x - 2 = 0$.

(b) Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de A. Est-elle diagonalisable ?

Dans la suite, M est solution de $M^2 + M = A$.

(c) c1. Montrer que si X est vecteur propre de M, alors X est vecteur propre de A et $\mathrm{Sp}(M) \subset \{-3, -2, 2, 1\}$.
c2. Montrer que A et M commutent. En déduire que X est vecteur propre $\implies$ X vecteur propre de M.

(d) Montrer (par l'absurde) que M a deux valeurs propres simples.

(e) Conclure (quelles sont les solutions de $M^2 + M = A$) ?

612.13

IMT

Soit A une matrice réelle antisymétrique.

(a) Montrer que si λ est valeur propre, alors $\lambda = 0$.

(b) Montrer que $I_n + A$ est inversible.

2 Exercices de niveau 2

612.14

Centrale

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $f_\alpha \;:\; M^\top + \alpha M$, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) f_0 est-elle diagonalisable ?

(b) Pour quelles valeurs de α f_α est-elle diagonalisable ?

(c) Déterminer les éléments propres de f_α.

612.15

Mines

Soit $A = (a_{ij})_{ij}$ la matrice définie par $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Pour $a \in \mathbb{R}$, calculer $\det(A - 2\cos a I_n)$. En déduire les valeurs propres de A.

612.16

Centrale 1

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on suppose diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On définit $(E_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k$$

(a) Montrer que la suite $(E_n(t))_n$ converge vers une matrice $E(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Caractériser l'endomorphisme représenté par $E(t)$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) *et d'autres questions...*

(d) *Une question posée par l'examinateur :*
Que peut-on dire pour deux matrices/endomorphismes qui commutent ? Le démontrer.

Examinateur très sympathique et jovial, qui guide si besoin mais laisse faire. Conditions d'oral très particulières : avec les fortes chaleurs qui régnaient, j'ai pris une insolation et j'ai donc comme qui dirait rendu mon déjeuner au beau milieu de l'oral. L'examinateur s'est montré très compréhensif et rassurant, et m'a laissé le choix de continuer l'oral ou non. J'ai choisi de continuer car l'oral se déroulait plutôt bien à mon goût, je n'ai pas voulu risquer de tomber sur un sujet plus déstabilisant en cas de report. Après cette mésaventure, j'ai réussi à bien continuer, ce qui a eu l'air de plaire à l'examinateur.

612.17

Mines-Ponts

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base $\mathcal{B}$.

(a) Préciser ses valeurs propres. A est-elle diagonalisable ?

(b) On note u un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre, v associé à l'autre valeur propre et k de coordonnées $(0, 0, 1)$ dans la base $\mathcal{B}$.
Montrer que :

$$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{B}' = (u, v, k)$ et α est à préciser.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer B^n et en déduire A^n.

(d) *Question bonus* Que dire de $\dim \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2, A^3, \dots)$?

Examinateur neutre, qui partait à plusieurs reprises et aidait peu.

612.18

Centrale

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on note $\alpha_i(\lambda)$, $i \in \{1, \dots, n\}$ les n racines n-ièmes de λ. On note $L_i(X)$, $i \in \{1, \dots, n\}$ les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux $\alpha_i(\lambda)$.

(a) Montrer que u diagonalisable implique u^n diagonalisable. Que penser de la réciproque ?

(b) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i = 1$. En déduire que $\mathrm{Ker}(u^n - \lambda \mathrm{id}_E) = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(u - \alpha_i(\lambda)\mathrm{id}_E)$.

(c) Montrer que, si u est inversible, alors u^n diagonalisable implique u diagonalisable.

612.19

Mines-Ponts

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = 1$ si $i + j$ est pair, $a_{ij} = 2$ sinon.

(a) Trouver les éléments propres de A.

(b) Résoudre $X^2 + 2X = A$ dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

612.20

Centrale

(a) Montrer que deux endomorphismes diagonalisables qui commutent sont co-diagonalisables.

(b) Soit $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On considère les affirmations :

(i) A et B sont diagonalisables et commutent ;

(ii) $A + \lambda B$ est diagonalisable pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Montrer que $(i) \implies (ii)$, que la réciproque est fausse sur $\mathbb{R}$, vraie sur $\mathbb{C}$.

612.21

Centrale

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $p \geqslant 2$ tel que M admet $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ valeurs propres distinctes. On suppose :

$$\forall i \in [\![2, p]\!],\ |\lambda_i| < |\lambda_1| \qquad (\star)$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{tr}(M^k) \neq 0$, on définit :

$$t_k(M) = \frac{\mathrm{tr}(M^{k+1})}{\mathrm{tr}(M^k)}$$

(a) Montrer que $(t_k)_k$ est définie à partir d'un certain rang et converge.

(b) Montrer que, si $(\star)$ n'est pas vérifiée, ce n'est pas toujours vrai.

(c) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

c1. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c2. Déterminer la limite de $\dfrac{A^k}{k}$.

Examinateur plutôt sympathique qui m'a demandé de faire une méthode « bourrin » pour la question 3a plutôt qu'une analyse/synthèse. C'est un exercice qui reste assez classique.

3 Exercices de niveau 3

612.22

X

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et Φ l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall f \in E,\ \Phi(f)\ :\ x \mapsto \int_0^1 \mathrm{Min}\{x,t\} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Déterminer les éléments propres de Φ.

612.23

X

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr} A^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$. Montrer que les valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à 1.

4 Exercices de la banque CCP MP

On peut travailler les exercices : **63 67 68 69 70 71 72 73 74 75 83 88 91**