1 Exercices de niveau 1

613.1

cc-INP

On note $E=\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$. Pour $X,Y\in E$, on définit $\langle X,Y\rangle = X^\top Y$.

(a) Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire.

(b) Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\mathrm{Im}(A)^\perp=\mathrm{Ker}(A^\top)$.

(c) Soit $Y\in E$. On note $f\ :\ \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R} \\ X & \mapsto & \|AX-Y\| \end{array}$

Montrer que $f(X)=\underset{Z\in E}{\mathrm{Inf}}(f(Z))$ si et seulement si $A^\top(AX-Y)=0$.

613.2

cc-INP

Pour $f,g\in E=\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$, on note $\phi(f,g)=\displaystyle\int_0^1 fg+f'g'$.

(a) Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E.

(b) On note $F=\{f\in E,\ f(1)=f(0)=0\}$ et $G=\{f\in E,\ f''=f\}$. Montrer que $F\overset{\perp}{\oplus}G=E$.

(c) Pour $a,b\in[0,1]$, on pose $E_{a,b}=\{f\in E, f(0)=a \text{ et } f(1)=b\}$.

c1. Trouver un élément f_0 dans $E_{a,b}$, puis montrer que $E_{a,b}=\{f_0+f,\ f\in F\}$.

c2. Trouver le projeté orthogonal de f_0 sur G.

(d) et une autre question non traitée. Peut-être : En déduire $\underset{h\in E_{a,b}}{\mathrm{Inf}}\displaystyle\int_0^1 h^2+h'^2$.

Examinateur qui n'intervient que rarement et pose des questions sur le cours.

613.3

Mines-Télécom

Soit f un endomorphisme bijectif dans E euclidien, tel que :

$$\forall x,y\in E,\ \langle f(x),y\rangle=-\langle x,f(y)\rangle$$

(a) Montrer que $f(x)$ et x sont orthogonaux.

(b) Montrer que $s=f\circ f$ est autoadjoint.

(c) Soit a une valeur propre de s et V_a son espace propre associé. On fixe $x\in V_a\setminus\{0\}$.

c1. Montrer que : $\langle s(x),x\rangle=a\|x\|^2=-\|f(x)\|^2$ et en déduire que $a<0$.

c2. Montrer que $F=\mathrm{Vect}(x,f(x))$ et $F^\perp$ sont stables par f.

(d) et d'autres questions...

Examinateur assez maniaque qui n'hésite pas à couper pendant les explications, il veut aller vite. Lorsqu'on est bloqué, il nous fait passer à la question suivante.

613.4

cc-INP

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa norme euclidienne. On pose $u_1=(1,2,0)$, $u_2=(1,0,1)$, $P=\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$ et $w=(1,1,1)$. Calculer $d(w,P)$.

613.5

cc-INP

On pose $L_m\ :\ P\in\mathbb{R}[X]\mapsto\displaystyle\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(-1)^{m+i}P(i)$.

(a) Montrer que L_m est une application linéaire.
On pose $H_0 = 1$, et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ H_k = \dfrac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$.

(b) b1. Montrer que $(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
b2. Calculer $H_k(i)$.

On pose $\varphi\ :\ (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2 \mapsto \displaystyle\sum_{m=0}^{n} L_m(P)L_m(Q)$.

(c) c1. Montrer que φ est une application bilinéaire, symétrique et positive.
c2. En déduire que φ est un produit scalaire.

On admet pour Q4 uniquement que $(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour φ.

(d) Exprimer X^2 en fonction de H_1 et H_2 puis calculer le projeté de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.

(e) Montrer que $(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour φ.

613.6

cc-INP

$\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle\,|\,\rangle$ et de sa norme euclidienne associée $\|\,.\,\|$.
On appelle endomorphisme stabilisant un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \langle f(x)|x\rangle = \|x\|^2$.

(a) Soit $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que h est stabilisant.

(b) b1. Soit f un endomorphisme stabilisant différent de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. On pose $g = f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \langle g(x)|x\rangle = 0$.
b2. Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de g.
En étudiant le degré de χ_g, montrer que 0 est valeur propre de g.

(c) c1. Montrer que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ \langle x|g(y)\rangle + \langle g(x)|y\rangle = 0$.
c2. Monrer que $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont orthogonaux.

(d) Soit e_1 un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ associé à la valeur propre 0 pour g.
Soit e_2 un vecteur unitaire tel que $e_2 \in \mathrm{Im}(g)$.
Montrer que $g(e_2) \neq 0$.
On pose $e_3 = \dfrac{g(e_2)}{\|g(e_2)\|}$.
Montrer que $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(e) Écrire la matrice de f dans $\mathcal{C}$.

2 Exercices de niveau 2

613.7

Centrale

Soit $I_k = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.

Soit $\varphi\ :\ (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2 \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) On admet que $I_0 = I_2 = 1$ et $I_1 = 0$ et $n = 2$ dans cette question.
Déterminer une b.o.n. (P_0, P_1, P_2) de $\mathbb{R}_2[X]$ pour φ.

(c) Montrer qu'il existe une b.o.n. $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ pour φ, échelonnée en degrés.

613.8

Mines-Ponts

On note $E = \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On considère $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ ses valeurs propres.

(a) Montrer que, pour tout $X \in E$, $\langle AX, X \rangle \leqslant \lambda_n \|X\|^2$.

(b) *Autres questions du style :*
Montrer que :

$$\lambda_k = \underset{F \in V_k}{\mathrm{Min}} \left(\underset{\substack{X \in F \\ \|X\|=1}}{\mathrm{Max}} \langle AX, X \rangle \right)$$

où V_k est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension k.

613.9

Centrale 1

Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on note $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1) Q^{(k)}(1)$.

(a) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire.

(b) Montrer que la famille $\Big((X-1)^n \Big)_n$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

(c) *et d'autres questions.*

Examinateur qui communique beaucoup.

613.10

Mines-Ponts

(a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x) \,\mathrm{d}x$.

(b) Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\int_0^1 x^2 (\ln(x) - ax - b)^2 \,\mathrm{d}x = \underset{\alpha, \beta \in \mathbb{C}}{\mathrm{Inf}} \int_0^1 x^2 |\ln(x) - \alpha x - \beta|^2 \,\mathrm{d}x$$

Examinateur agréable, qui donne quelques idées sans trop en dire pour que l'on puisse avancer.

613.11

Centrale 1

Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

(a) Énoncer et faire la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\| \leqslant \|X\|$.
On fixe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on pose $Y = A^\top X$.

b1. Montrer que $\langle X, AY \rangle = \|Y\|^2$.

b2. Montrer que $\|Y\| \leqslant \|X\|$.

(c) Soit $X \in E$. Montrer que si $AX = X$, alors $A^\top X = X$.

(d) Établir :

$$E = \operatorname{Ker}(A - I_n) \oplus \operatorname{Im}(A - I_n)$$

613.12

Centrale 1

Soit $(v_1, \dots, v_{n+1})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n+1\},\ i \neq j \implies \langle v_i, v_j \rangle = -1$$

(a) La famille $(v_1, \dots, v_{n+1})$ peut-elle être libre ? Donner un exemple en dimension 2.

(b) On pose, pour $i \in \{1, \dots, n+1\}$, $\mu_i = \dfrac{1}{\|v_i\|^2 + 1}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i = 1$, puis que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i v_i = 0$.

(c) Montrer que toute sous-famille stricte de $(v_1, \dots, v_{n+1})$ est libre.

Il y avait d'autres questions que je n'ai pas eu le temps de traiter. Le temps passe très vite !

613.13

Centrale

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On veut montrer :

$$A^\top A = B^\top B \iff \exists U \in O_n(\mathbb{R}),\ B = UA$$

(a) a1. On suppose B inversible. Montrer le résultat.

a2. Application : résoudre l'équation $X^\top X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) On suppose $A^\top A = B^\top B$.

b1. Montrer que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$ puis que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$. On note r ce nombre.

b2. Montrer que les valeurs propres de $A^\top A = B^\top B$ sont positives. On les note :

$$\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r > \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$$

b3. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ A^\top A \epsilon_i = \lambda_i \epsilon_i$$

b4. On pose, pour $i \in \{1, \dots, r\}$, $e_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A\epsilon_i$. Montrer que $(e_1, \dots, e_r)$ est une base orthonormée de $\operatorname{Im}(A)$.

b5. Montrer qu'il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $B = UA$.

3 Exercices de niveau 3

613.14

X

Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique de valeurs propres : $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.
On pose : $E = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \|X\| = \|Y\| = 1 \text{ et } \langle X, Y \rangle = 0\}$.
Montrer que : $\lambda_n - \lambda_1 = 2 \displaystyle\operatorname*{Sup}_{(X,Y) \in E} |X^\top S Y|$.

4 Exercices de la banque CCP MP

On peut travailler les exercices : **39 76 77 78 79 80 81 82 92**