1 Exercices de niveau 1

621.1

cc-INP

Soit $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } u_{n+1} = \sin(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(a) Montrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

(b) Montrer que $\sum u_n^3$ converge. On pourra utiliser $u_{n+1} - u_n$.

(c) Étudier la convergence de $\sum u_n^2$. On pourra utiliser $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

621.2

Mines-Télécom

On note $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

(a) Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $a_n = \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

(b) On note :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$$

Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Donner le développement limité à l'ordre 3 de $\ln(1+x)$.

(d) Montrer que la suite $\big(\ln(u_n\sqrt{n})\big)_n$ converge.

621.3

cc-INP

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de réels qui converge vers 0.
On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n\ :\ x \in \mathbb{R} \mapsto a_n \sin(nx)$.

(a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R} \iff \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

(b) On pose, $\forall n \geqslant 1,\ \forall x \in \mathbb{R},\ T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$ et $T_0(x) = 0$.

b1. Calculer $T_n(x)$.
Établir que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2p\pi/\, p \in \mathbb{Z}\},\ |T_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{|\sin(x/2)|}$.

b2. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(a_n - a_{n+1})T_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

(c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$; on pose $S_N \ : \ x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=1}^{N} u_k(x)$.

Montrer que $S_N(x) = \sum_{k=1}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) T_k(x) + a_N T_N(x)$.

En déduire que $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

621.4

IMT

Soit p, q dans $\mathbb{R}_*^+$ tels que $p > q$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{pu_n + qv_n}{p+q} \\ v_{n+1} = \dfrac{pv_n + qu_n}{p+q} \end{cases}$ avec u_0, v_0 dans $\mathbb{R}^+$.

(a) Montrer que $(u_n - v_n)$ est géométrique.

(b) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

(c) Énoncer le théorème des suites adjacentes.

(d) Déterminer la limite de (u_n).

621.5

IMT

On pose $\forall n \geqslant 1, \ u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \right)$, $v_n = \ln(u_n)$.

(a) Vérifier que $\forall n \geqslant 1, \ v_n$ existe.

(b) Déterminer la limite de (v_n).

(c) En déduire la limite de (u_n).

621.6

Navale

(a) Montrer que, pour tout n, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}$ tel que :

$$x_n^5 + x_n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$$

(b) Montrer que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

(c) Montrer que $x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

(d) Étudier la convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

Examinateur très sympathique avec des remarques pertinentes sans que l'on se sente assisté pour autant.

621.7

Mines-Télécom

On note :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } T_n = S_n + \frac{1}{n\,n!}$$

(a) Montrer que $(S_n)_n$ et $(T_n)_n$ sont adjacentes.

(b) En déduire que $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n!}\right)$.

(c) Étudier la série de terme général $\sin(\pi\,\mathrm{e}\,n!)$.

Examinatrice très désagréable. Elle force à écrire sans prendre le temps de réfléchir, ce qui mène à des erreurs bidon.

621.8

CCP

(a) Soit $a_n = \dfrac{1}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}$. Montrer que $\sum a_n$ converge.

(b) Soit $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que $H_{2n+1} - H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$.

(c) Déterminer a, b, c tels que $a_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1}$.

(d) Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

2 Exercices de niveau 2

621.9

Centrale

Soit u définie par $\begin{cases} u_0 = \alpha > 0 \\ \forall n,\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n \end{cases}$

(a) Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

(b) On pose $\forall n,\ v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$; montrer que (v_n) converge vers un certain β.

(c) Montrer que $|v_n - \beta| = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

(d) Déterminer un équivalent de u_n.

621.10

Mines-Ponts

Soit (u_n) une suite positive et décroissante.

(a) Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(b) Qu'en est-il de la réciproque ?

(c) On pose $\forall n,\ v_n = n(u_{n+1} - u_n)$ et on suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
Que vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$?

621.11

Mines

Soit $\alpha > 0$ et $(a_n)_n$ une suite réelle telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha \ln n$.
Étudier la convergence de la série $\sum \mathrm{e}^{-a_n}$.

621.12

Mines

Soit $(u_n)_n$ une suite bornée de réels telle que $u_n + \frac{1}{2}u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
Montrer que $(u_n)_n$ converge, et déterminer sa limite.

621.13

Centrale 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.

(a) Montrer que la suite $(I_n)_n$ converge, et déterminer sa limite.

(b) Établir une relation entre I_{n+1} et I_n.

(c) Étudier selon la valeur de α la suite $(v_n)_n$, où $v_n = \ln(n^\alpha I_n)$.

(d) Montrer que $\sum \dfrac{I_n}{n}$ converge, et calculer sa somme.

621.14

Mines-Ponts

Sans préparation.
Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 \binom{n}{k}$$

Examinateur très courtois, mais difficile à suivre car il avait une manière très particulière de s'exprimer.

621.15

Mines-Ponts

(a) Existence et valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t - \operatorname{Arctan} t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

(b) Existence et valeur de $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n+1)}$.

Examinateur sympathique, mais qui parle très doucement.

3 Exercices de la banque CCP MP

On peut travailler les exercices : **43 46 47 55 1 5 6 7**