1 Exercices de niveau 1

624.1

Mines-Télécom

On définit, pour $x \in \mathbb{R}$: $\varphi(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t}$

(a) Montrer que φ est bien définie.

(b) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que : $\varphi'(x) = \varphi(x)\Big(\varphi(x) - x\Big)$

(c) Montrer une égalité « compliquée » qui s'obtient immédiatement (j'ai oublié l'expression mais c'était polynomial).

624.2

cc-INP

On note, pour $n, p \in \mathbb{N}^*$: $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 \ln(x)^n\, x^p\,\mathrm{d}x$ et $f(x) = \dfrac{1}{x^x}$ pour $x \in D_f$.

(a) Montrer que $I_{n,p}$ existe.

(b) Montrer que, pour $n > 1$ et $p > 0$: $I_{n,p} = -\dfrac{n}{p+1} I_{n-1,p}$

(c) Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$.

(d) Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$

624.3

Mines-Télécom

On s'intéresse à : $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$

(a) Déterminer D_f.

(b) Étudier la continuité de f.

(c) Montrer que $f(x) = f(1-x)$.

(d) Déterminer un équivalent en 0.

624.4

cc-INP

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t$.

(a) Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \cos^n(t)$.

(b) b1. Montrer que (u_n) converge vers 0.

b2. Via une intégration par parties, montrer que $\forall n,\ u_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} u_n$.

b3. Montrer que $\forall n,\ u_{2n+1} \neq 0$ et trouver le rayon de convergence de $\sum u_{2n+1}x^{2n+1}$.

On pose $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1}x^{2n+1}$ lorsque ça existe.

(c) Montrer que g est solution d'une équation différentielle.

(d) Donner l'expression de $g(x)$.

624.5

cc-INP

(a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists! y \in \mathbb{R} / \displaystyle\int_x^y \mathrm{e}^t \mathrm{d}t = 1$.

(b) b1. Montrer qu'il existe F $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x,\ F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$.

Montrer que F est strictement croissante.

b2. Montrer que F est impaire et que $\forall x \geqslant 0,\ F(x) \geqslant x$.
Montrer que $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

(c) Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists! y \in \mathbb{R} / \displaystyle\int_x^y \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t = 1$.

(d) On pose $\forall x,\ g(x) = F^{-1}(1 + F(x))$. Montrer que g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(e) Montrer que $\forall x \geqslant 0,\ F(x) \leqslant 1 + F(x) \leqslant F\left(x + \mathrm{e}^{-x^2}\right)$.
En déduire que le graphe de g admet comme asymptote la droite $y = x$ en $+\infty$.

(f) ?

624.6

cc-INP

Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(a) Montrer que (H_n) est croissante. Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n$?

Soit $F\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-u)^x}{u}\mathrm{d}u$.

(b) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que F est croissante.

(c) Calculer, pour tout $x \geqslant 0,\ F(x+1) - F(x)$. En déduire l'expression de $F(n)$ en fonction de H_n.

(d) Montrer que, $\forall x \geqslant 0,\ \ln(x+1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$.

(e) Montrer que $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x+1)$.

2 Exercices de niveau 2

624.7

Mines-Ponts

On définit $f : \begin{array}{rcl} [-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(1+x\cos^2(t)\big)\,\mathrm{d}t \end{array}$

(a) Justifier le domaine de définition.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.

(c) Montrer que f est continue en -1.

(d) Calculer $f'(x)$ en posant $u=\tan(t)$.

(e) En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(t)\big)\,\mathrm{d}t$.

(f) f est-elle dérivable en -1 ?

Exercice très calculatoire, pendant la préparation j'avais les bonnes pistes mais je ne pensais pas qu'elles aboutissaient vus les calculs. Mais c'était pourtant cela.

624.8

Mines-Ponts

(a) Soit φ une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin\big((2n+1)t\big)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

(b) Pour $n\in\mathbb{N}$, on note :

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t,\quad J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ et } I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Montrer l'existence de ces intégrales.

(c) Calculer I_n-I_{n-1}. En déduire la valeur de I_n.

(d) En déduire que $I=\dfrac{\pi}{2}$.
(Le « en déduire » fait très mal !)

J'étais le dernier à passer, et ça se sentait. Examinateur calme et discret, qui donne quelques indications lorsque je bloquais mais qui ressemblaient plus à des pistes qu'à des éléments de solution.

624.9

Mines-Ponts

Pour $x>0$, on note $\varphi(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que φ est bien définie.

(b) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

(c) Montrer qu'au voisinage de 0, $\varphi(x)=\mathrm{O}(\ln(x))$.

(d) Montrer que φ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

(e) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

Examinateur sympa qui valide souvent ce qu'on écrit.

624.10

Mines-Ponts

Pour $p, q \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on note : $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^{px}\big(\ln(t)\big)^q\,\mathrm{d}t$

(a) Montrer que $I_{p,q}$ existe et la calculer.

(b) On note $f(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{t^x}\,\mathrm{d}t$. Montrer que : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(nx+1)^{n+1}}$

Je n'ai pas été très efficace mais j'ai su dire les points vraiment importants du cours.

624.11

Mines-Ponts

Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on note $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\cos(nt)}{(\cos t)^n}\,\mathrm{d}d$.

(a) Établir une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x)$.

(b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$: $\displaystyle\frac{I_n(x)}{2^n} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin(kx)}{k(2\cos x)^k}$.

(c) Montrer qu'il existe un intervalle I tel que, pour tout $x \in I$, $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k(2\cos x)^k}$.

624.12

Mines-Ponts

Pour $\alpha > 0$, on pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t^\alpha)\,\mathrm{d}t$.

(a) Étudier l'existence de $I(\alpha)$.

(b) Écrire $I(\alpha)$ sous la forme d'une somme de série.

(c) Déterminer limite et équivalent simple de $I(\alpha)$ pour $\alpha \to +\infty$.

624.13

Mines-Ponts

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 2π-périodique. Montrer qu'il existe un unique réel a tel que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)-a}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

3 Exercices de la banque CCP MP

On peut travailler les exercices : **25 26 28 29 30 49 50 56**