1 Exercices de niveau 1

625.1

cc-INP

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$.

(a) Justifier que E est un espace vectoriel.

(b) On note $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que N est un norme.

(c) Montrer que, pour $f \in E$ et $x \in [0,1]$:

$$\mathrm{e}^x f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^t (f(t) + f'(t))\,\mathrm{d}t$$

(d) On note $N'(f) = \|f + f'\|_\infty$. Montrer que N' est une norme.

(e) Montrer qu'il existe α et β strictement positifs tels que, pour tout $f \in E$:

$$\alpha N'(f) \leqslant N(f) \leqslant \beta N'(f)$$

Examinateur cordial, qui laisse avancer et revient plus tard sur des points mal abordés.

625.2

cc-INP

On pose $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^2$ qui vérifient $y''(t)+q(t)y(t) = 0$ avec q une fonction T-périodique. Soit $y_1,\ y_2$ dans $\mathcal{S}$ telles que $y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 0,\ y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1$. On admet que $\mathcal{B} = (y_1, y_2)$ est une base de $\mathcal{S}$.

(a) Trouver $\mathcal{S}$ dans le cas où q est la fonction constante égale à 1. Montrer que $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ = ens. des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(b) Pour y dans $\mathcal{S}$, on pose $\forall t \in \mathbb{R},\ f(y)(t) = y(t+T)$.

   b1. Montrer que $f(y) \in \mathcal{S}$, puis que f est un endomorphisme de $\mathcal{S}$.

   b2. Montrer que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{pmatrix}$

(c) c1. On pose $\forall t \in \mathbb{R},\ W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$. Montrer que W est constante égale à 1.

   c2. Montrer que $\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}\,(A)X + 1$.

(d) On suppose maintenant que $|\,\mathrm{tr}\,(A)| < 2$. Montrer que A a deux valeurs propres complexes conjuguées de module 1. Montrer que $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(e) On suppose $|\,\mathrm{tr}\,(A)| = 2$. Montrer que $\mathcal{S}$ possède des solutions bornées.

625.3

cc-INP

Soit $E = \{(x,y) \in]0,+\infty[^2 /\ x^y = y^x\}$.
On remarque que si $x > 0$, alors $(x,x) \in E$ et on remarque également que $(x,y) \in E \iff (y,x) \in E$.

(a) Montrer que $(x,y) \in E \iff \dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{\ln(y)}{y}$.

(b) b1. Étudier les variations (+ tableau) de $\varphi\ :\ x > 0 \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.

b2. Trouver les x tels que $(x, x^2) \in E$.

(c) c1. Soit $x \in]0,1]$. Montrer qu'il n'existe pas de y tels que $(x,y) \in E$ et $x < y$.

c2. Soit $x \in]1, \mathrm{e}[$. Montrer qu'il existe un unique y tel que $(x,y) \in E$ et $x < y$. On note $\psi(x)$ cet unique y.

(d) Montrer que ψ est continue et strictement décroissante, $\mathcal{C}^1$.

(e) Trouver tous les couples $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}/\ a^b = b^a$.

2 Exercices de niveau 2

625.4

Mines-Ponts

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi P(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Que peut-on en déduire sur P ?

625.5

Mines-Ponts

(a) Rechercher les solutions développables en série entière de :

$$2xy'(x) + y(x) = 3x\varphi(x) \text{ avec } \varphi(x) = \begin{cases} \cos(x^{3/2}) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \mathrm{ch}((-x)^{3/2}) & \text{sinon} \end{cases}$$

(b) Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ et tracer l'allure de ses solutions.

Examinatrice qui n'a pas envie d'être là, qui ne veut pas aider et qui souffle très fort à chaque fois qu'on écrit quelque chose (juste ou faux).

625.6

Centrale 1

Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui tend vers 0 en $+\infty$. On considère l'équation :

$$(E)\ :\ y' + 3y = g$$

(a) On admet provisoirement que

$$\mathrm{e}^{-3x} \int_0^x g(t)\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Montrer que, si f est solution de (E), alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

(b) Démontrer le résultat admis précédemment.

(c) On suppose maintenant que $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire de f solution de (E) ?

(d) et d'autres questions.

Examinateur qui dessinait pendant mes explications.

625.7

Mines-Ponts

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{R}$. On définit $P_0 = 1$ et, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $P_k = X(X - ku)^{k-1}$.

(a) Montrer que $(P_O, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$P(X) = P(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(ku)}{k!} P_k(X)$$

625.8

Mines-Ponts

Soit $n \in \mathbb{N}$, avec n pair. On considère $P = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n$.
Montrer que, si $a \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, a^{2^k} est racine de P.

625.9

Mines-Ponts

Pour deux fonctions α et β dérivables sur un intervalle I, on définit le wronskien de α et β comme la fonction défnie sur I par :

$$W \ : \ t \mapsto W(t) = \begin{vmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \alpha'(t) & \beta'(t) \end{vmatrix}$$

On pose : $(F) \ : \ y'' = a(t)y' + b(t)y$.

(a) Soit φ, ψ deux solutions de F. Montrer que le wronskien de φ et ψ est solution de $(E) \ : \ y' = a(t)y$.

(b) Exprimer $\left(\dfrac{\psi}{\varphi}\right)'$ en fonction du wronskien de φ et ψ.

(c) Montrer qu'il existe une solution φ de $(E_1) \ : \ 2ty'' + y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$, développable en série entière et telle que $\varphi(0) = 1$.

(d) Résoudre (E_1) sur des intervalles que l'on précisera.

(e) En déduire les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$.

Très déçu de moi pour cet oral. Examinateur plutôt sympathique en première apparence, mais qui pose des questions qui ont pour effet de déstabiliser et de faire perdre le fil. Ainsi, j'ai beaucoup moins bien réussi le premier exercice que ce à quoi je m'attendais pendant la préparation, et le deuxième exercice a fini de m'achever.

625.10

Mines-Ponts

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y'' + y' + y = \frac{\cos(nx)}{n^3}$$

(b) Montrer que $f \ : \ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(c) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y'' + y' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$$

625.11

Centrale

Soit $a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} a(x)\,\mathrm{d}x$ existe.

(a) A-t-on nécessairement $a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$?

(b) Soit f vérifiant sur $\mathbb{R}_+$ l'équation différentielle :

$$y''(x) + (1 + a(x))y(x) = 0$$

On définit :

$$g \;:\; x \in \mathbb{R}_+ \mapsto f(x) + \int_0^x \sin(x-t)\, a(t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, puis que $g'' + g = 0$.

(c) Montrer qu'il existe $c \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\; |f(x)| \leqslant c + \int_0^x |a(t)|\,|f(t)|\,\mathrm{d}t$$

(d) Montrer que toutes les solutions de $y'' + (1+a)y = 0$ sont bornées.

625.12

Mines-Ponts

Déterminer les extremums sur $\mathbb{R}^3$ de $f \;:\; (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

3 Exercices de niveau 3

625.13

X

Existe-t-il une suite (a_n) de réels non nuls telle que $\forall n \geqslant 1,\; P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ soit scindé à racines simples dans $[0,1]$?

Travailler sur $Q_n = a_n + a_{n-1}X + \ldots + a_0 X^n$.

4 Exercices de la banque CCP MP

On peut travailler les exercices :

- Nombres complexes : **84 89**
- Fonctions d'une variable réelle : **3 4**
- Fonctions de deux variables : **33 52 57**
- Équations différentielles : **32 42**
- Espaces vectoriels normés : **34 à 38 41 44 45 54 61**