1 Exercices de niveau 1

631.1

cc-INP

Soit X, Y deux va indépendantes, qui suivent la même loi, d'espérance et de variance finie, et telles que $Z = X + Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre p.

(a) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

(b) Déterminer $G_X \,:\, t \mapsto E(t^X)$.

(c) En déduire la loi de X.

631.2

Mines-Télécom

Soit X une va telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(X \geqslant n) > 0$ pour tout n. On note $x_n = P(X = n | X \geqslant n)$.

(a) Montrer que : $x_n = \dfrac{P(X = n)}{P(X \geqslant n)}$ et $1 - x_n = \dfrac{P(X \geqslant n+1)}{P(X \geqslant n)}$.

(b) b1. Montrer que : $P(X \geqslant n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{P(X \geqslant k+1)}{P(X \geqslant k)} = \prod_{k=1}^{n-1}(1 - x_k)$.

b2. Exprimer $P(X = n)$ à l'aide des termes de la suite $(x_n)_n$.

b3. Montrer que $(P(X = n))_n$ est une suite géométrique si et seulement si $(x_n)_n$ est constante.

631.3

cc-INP

(a) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 2b \end{pmatrix}$. Trouver une CNS sur a, b pour que M soit diagonalisable.

(b) Soit $X \sim \mathscr{G}(p)$. Que vaut $P(X > n)$ pour $n \in \mathbb{N}$?

(c) Soit X, Y deux va indépendantes telles que $X \sim \mathscr{G}(p_1)$ et $Y \sim \mathscr{G}(p_2)$. On note : $M = \begin{pmatrix} 0 & -X \\ X & 2Y \end{pmatrix}$.
Quelle est la probabilité de l'événement « M est diagonalisable » ?

(d) Même question avec $X \sim Y \sim \mathscr{B}(n, 1/2)$.
Quelle est la limite de cette probabilité lorsque $n \to +\infty$.

J'ai fini cet exercice au bout d'environ 20 minutes, mais l'examinateur n'a validé que deux questions traitées sur 4.

631.4

Mines-Télécom

On réalise des expériences aléatoires indépendantes qui ont une probabilité p de succès et $1 - p$ d'échec. On considère la va T_n qui compte le nombre d'étapes pour obtenir n succès.

(a) Déterminer la loi de T_1.

(b) Déterminer la loi de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Donner le DSE de $\dfrac{1}{(1-t)^n}$.

631.5

cc-INP

Soit $p \in \,]0, 1[$. On note $p_k = k(1-p)^{k-1}p^2$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une distribution de probabilité.

On considère X une va dont la loi est donnée par $(p_k)_k$, c'est-à-dire que $P(X=k)=p_k$ pour tout k.

(b) Montrer l'existence et calculer l'espérance de $X-1$ et de $(X-1)(X-2)$.

(c) Calculer alors $E(X)$ puis $V(X)$.

Examinateur gentil, il m'aidait quand je bloquais et me laissait gérer mon oral tout en me signalant lorsque le temps s'écoulait trop.

631.6

cc-INP

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une Bernoulli de paramètre p.
On pose $\forall n,\ Y_n = X_n X_{n+1}$.
Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_n, $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_{k+i})$ avec $i \in [\![1,n]\!],\ k\in[\![0,n-i]\!]$.

631.7

cc-INP

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement 2 boules, sans remise. X désigne le numéro de la 1ère boule, Y celui de la 2ème.
Déterminer la loi de X, puis celle du couple (X,Y), et enfin celle de Y.

631.8

cc-INP

Soit $A=\begin{pmatrix}\pi & 1\\ 0 & \pi\end{pmatrix}$ et $E=\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} / (a,b,c,d)\in\{0,1\}^4\}$.

(a) A est-elle diagonalisable ?

(b) On choisit au hasard une matrice de E ; quelle est la probabilité que cette matrice soit diagonalisable ?

631.9

cc-INP

On pose $\forall n\geqslant 1,\ \forall k,\ a_{n,k} = 1-\left(1-\dfrac{1}{2^k}\right)^{n-1}$ et $\forall n\geqslant 1,\ \forall k\geqslant 1,\ p_{n,k}=a_{n,k-1}-a_{n,k}$.

(a) Montrer que $\forall p\geqslant 1,\ I_p=\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1-\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)^p\right)\mathrm{d}t$ converge.

(b) Montrer que $p_{n,k}\geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} p_{n,k}=1$.
On dispose alors d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$ et d'une variable aléatoire X_n telle que $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(X_n=k)=p_{n,k}$.

(c) c1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} a_{n,k}$ converge.

c2. En déduire que X_n admet une espérance et que $E(X_n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}$.

(d) On pose $g_n\ :\ u\mapsto 1-\left(1-\dfrac{1}{2^u}\right)^{n-1}$.

d1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_{n,k}\leqslant\int_0^N g_n(u)\mathrm{d}u\leqslant\sum_{k=0}^{N-1} a_{n,k}$.

d2. En déduire que $E(X_n)-1\leqslant\dfrac{I_{n-1}}{\ln(2)}\leqslant E(X_n)$.

(e) En admettant que $I_{n-1} \sim \ln(n)$, trouver un équivalent simple de $E(X_n)$.

631.10

IMT

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - nP(X>n)$ (pour X v.a.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$).

631.11

IMT

On dispose de deux variables aléatoires réelles X et Y, indépendantes, telles que $X \sim \mathscr{G}(\frac{1}{3})$ et $Y \sim \mathscr{G}(\frac{2}{3})$. On pose $W = X + Y$.

(a) Trouver la variance de W.

(b) Trouver la loi de W.

2 Exercices de niveau 2

631.12

Mines-Ponts

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit $(X_n : \Omega \to \mathbb{R})_n$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes, non sûrement constantes et bornées, de même loi.
Soit $Y_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1,\ Y_n = Y_{n-1}X_n$.
On admet que les Y_n suivent la même loi.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}/\ P(X_1 = x) > 0$.

- a1. Montrer que $P(X_1 = x^2) > 0$.
- a2. En déduire que $|x| \leqslant 1$.
- a3. Montrer que $x \in \{-1, 1\}$.

(b) Donner la loi de X_1.

(c) Montrer que la suite (Y_n) est composée de v.a. mutuellement indépendantes.

631.13

Centrale 1

Soit C_1, C_2, C_3 trois clients dans une gare qui possède deux guichets vendant des billets. On note X_i la v.a. associée au client C_i comptant la durée de l'opération au guichet, et on suppose que $X_i \sim \mathscr{G}(p)$ où $p \in]0,1[$.
Les clients C_1 et C_2 vont les premiers aux guichets, et C_3 prend la première place qui se libère.
On définit $\Delta = |X_1 - X_2|$ et on appelle A l'événement « C_3 finit son opération en dernier ».

(a) Déterminer la loi de Δ.

(b) Calculer $P(A)$.

631.14

Mines-Ponts

On fixe $s \in]1, +\infty[$. On considère X un va avec $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$P(X = n) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s} \text{ où } \zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s}$$

(a) Calculer $P(n|X)$ où la notation $n|X$ signfie n divise X.

(b) On note $v_p(X) = \text{Max}\{k \in \mathbb{N},\ p^k|X\}$. Déterminer la loi de $v_p(X)$ et son espérance.

Examinateur qui sort de la salle et qui parle moyennement français.

631.15

Centrale 1

Soit X et Y deux v.a. supposées indépendantes telles que :

$$X^2 \hookrightarrow \mathscr{G}(p) \text{ et } Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$$

avec $p \in]0,1[$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
On définit :

$$M = \begin{pmatrix} 2Y-3 & -2 & -2Y+4 \\ Y-8X-11 & -10 & 8X-Y+20 \\ 2Y-4X-7 & -6 & 4X-2Y+12 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } W = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Donner une valeur propre et un vecteur propre U associé, indépendants de X et Y.

(b) Calculer MV et MW.

(c) En fonction de X et Y, définir/donner l'événement « M est diagonalisable » (dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).

(d) Donner la probabilité que M soit diagonalisable.

L'examinateur était agréable et donnait des indications pour avancer, en posant quelques questions de cours pour aider à la réflexion. Mais il ne faut pas se fier à ses impressions ! Je n'ai eu que 09/20 en ayant presque fini l'exercice.

631.16

Mines-Ponts

Soit $U, V\ :\ \Omega \to \{-1, 1\}$ deux v.a. discrètes indépendantes. On suppose que U et V suivent la même loi de probabilité :

$$P(U=-1) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(U=1) = \frac{2}{3}$$

On pose $X = U$ et $Y = \text{signe}(U)V$.

(a) Montrer que Y est une v.a. discrète.

(b) Donner la loi de (X, Y).

(c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

(d) Les variables X^2 et Y^2 sont-elles indépendantes ?

631.17

Centrale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\frac{1}{2}, 1[$. On considère U_n une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n, p, et on note $X_n = 2U_n - n$.

(a) Déterminer $X_n(\Omega)$.

(b) Montrer que :

$$\forall s \in \mathbb{R}_+,\ P(X_n \leqslant 0) \leqslant E\left(\mathrm{e}^{-sX_n}\right)$$

(c) En déduire que : $P(X_n \leqslant 0) \leqslant (2\sqrt{p(1-p)})^n$.

Et d'autres questions non traitées...

3 Exercices de la banque CCP MP

On peut travailler les exercices : **95 à 112**