642.1

Centrale II

On considère E l'ensemble des suites réelles qui suivent la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + u_n$$

On considère $a = (a_n)_n$ et $b = (b_n)_n$ les deux suites de E telles que :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = 0 \\ b_1 = 1 \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $w_n = a_{n+1}b_n - b_{n+1}a_n$.

(a) a1. Écrire une fonction Python `suite(x,y,n)` qui renvoie les valeurs de u_k pour $k \in [\![0, n]\!]$, avec $u_0 = x$ et $u_1 = y$, et $u \in E$.
Tester pour $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ avec $n = 10$, et vérifier que $a_7 = 972$.

a2. Écrire une fonction `w(n)` qui renvoie la liste des valeurs de w_k pour $k \in [\![0, n]\!]$, et tester avec $w(10)$. Que conjecturer ?

a3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n = \dfrac{a_n}{b_n}$. Écrire une fonction `f(n)` qui renvoie la valeur de $f(n)$. Tester avec $f(10)$.

(b) b1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est un entier naturel. Étudier la monotonie de $(a_n)_n$ et montrer que $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

b2. Énoncer un résultat analogue pour $(b_n)_n$.

b3. Démontrer la conjecture pour $(w_n)_n$.

(c) c1. Exprimer $f_{n+1} - f_n$ en fonction de b_n, b_{n+1} et w_n.

c2. Montrer que $(f_{2n})_n$ et $(f_{2n+1})_n$ sont adjacentes.

c3. *Et d'autres questions.*

L'examinateur m'aidait quand j'étais trop en difficulté. Je n'ai pas réussi une partie de la programmation de w_n et il a réfléchi avec moi à ce qui n'allait pas dans mon programme.

642.2

Centrale II

On note $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Tracer son graphe sur $[-10, 10]$. Que peut-on conjecturer ?

(c) c1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

c2. En effectuant le changement de variable $u = xt$, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

(d) On considère $(E)\ :\ y'' - y = 0$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$, $y'(0) = -\frac{\pi}{2}$.

d1. Montrer que (E) admet une unique solution.

d2. Tracer les solutions sur $[0, 10[$, avec `scipy.integrate.odeint`. Qu'en déduire par rapport à f ?

(e) e1. Montrer que $\dfrac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\dfrac{x}{u^2+x^2}\right) = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{x}{u^2+x^2}\right)$.

e2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' = y$.

Et d'autres questions.

642.3

Centrale II

On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = n(u_n + u_{n_1}) \end{cases}$$

(a) Calculer u_2, u_3. Calculer u_{10} avec Python.

(b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $\dfrac{n!}{3} \leqslant u_n \leqslant n!$. En déduire le rayon de convergence de la série $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$.

(c) Montrer que la fonction S est solution d'une équation linéaire du premier ordre sur un intervalle que l'on précisera.

(d) Exprimer $S(x)$ à l'aide des fonctions usuelles. En déduire l'expression de u_n en fonction de n. Vérifier le résultat trouvé pour u_{10}.

642.4

cc by nc sa *Concours Centrale Supélec - Math II*

Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la matrice carrée $M(n)$ formée « en serpent » par les nombres 1, 2, 3, 4, …, n^2. Par exemple :

$$M(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad M(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad M(4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

(a) Donner en Python une fonction f telle que $f(n, i, j) = (M(n))_{i,j}$.

(b) Créer une fonction M d'argument $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoyant $M(n)$. Tester pour $1 \leqslant n \leqslant 5$.

(c) Calculer le rang de $M(n)$ pour $1 \leqslant n \leqslant 10$.

(d) Conjecturer la valeur de $\mathrm{rg}(M(n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et démontrer cette conjecture.

(e) Définir une fonction permettant d'afficher la ligne brisée formée par les points de coordonnées $(k, \mathrm{tr}(M(k)))$, pour $1 \leqslant k \leqslant n$.
Tester pour $n = 100$. Essayer aussi pour $n = 1000$.

(f) Afficher les 100 premières valeurs de $\dfrac{\mathrm{tr}(M(n))}{n^3}$. Commenter.

(g) Trouver un équivalent de $\mathrm{tr}(M(n))$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(h) Trouver une expression pour $\mathrm{tr}(M(n))$ (on pourra commencer par traiter le cas où n est pair).

642.5

🅭🅯🄏🄎 *Concours Centrale Supélec - Math II*

(a) a1. Importer la fonction `fsolve` du sous-module `optimize` du module `scipy`, puis entrer le code suivant et l'expliquer :

```
def f(x):
    return [ 2*x[0]**2 + 3*x[1] - 11,
             3*x[0] - 2*x[0]*x[1] - 2 ]

sol1 = fsolve(f, [0,0])
sol2 = fsolve(f, [1,1])
sol3 = fsolve(f, [2,1])
print(sol1, sol2, sol3)
```

a2. Dans cette question, on considère la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une matrice S_1 symétrique réelle à valeurs propres positives et une matrice orthogonale U_1 telle que $A_1 = U_1 S_1$.

Si les résultats obtenus sont des flottants, on pourra les multiplier par la racine carrée d'un nombre premier inférieur à 10 pour obtenir des valeurs exactes.

(b) Soit n un entier au moins égal à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.

b1. Montrer qu'il existe un couple (U, S) où U est orthogonale et S est symétrique réelle à valeurs propres strictement positives telles que $A = US$.

On pourra commencer par établir l'existence d'une matrice P orthogonale et d'une matrice D diagonale à coefficients strictement positifs telles que $P^\top \left(A^\top A\right) P = D^2$.

b2. En déduire que pour toute A de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ il existe deux matrices orthogonales V et W et une matrice diagonale D telle que $VAW = D$.

b3. Donner de telles matrices (V_1, W_1 et D_1) pour la matrice A_1 précisée ci-dessus.

Pour chacune des matrices, on donnera si possible les valeurs exactes et des valeurs décimales approchées raisonnables des coefficients.

642.6

🅭🅯🄏🄎 *Concours Centrale Supélec - Math II*

(a) Avec Python, créer un tableau b tel que, pour tout (i, j) de $[\![0, 12]\!]^2$, on ait :

$$\begin{cases} b_{i,j} = \binom{i}{j} & \text{si } j \leqslant i \\ b_{i,j} = 0 & \text{si } j > i \end{cases}$$

(b) On note $\mathrm{e} = \exp(1)$ et pout tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, on pose $u_{n,k} = \dfrac{k^n}{k!}$.

b1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, la série de terme général $u_{n,k}$, pour k de $\mathbb{N}$, est convergente.

On note $A_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}$ sa somme.

b2. Donner la valeur exacte de A_0 et A_1.

b3. Exprimer, pour tout $n \geqslant 1$, A_{n+1} en fonction de $(A_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$.

b4. En déduire les valeurs exactes de A_n pour n dans $[\![0,12]\!]$.

(c) On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{n!} x^n$.

c1. Montrer que cette série entière est de rayon de convergence R non nul, au moins égal à 1.
Pour tout x de $I =]-R, R[$, on note $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{n!} x^n$.

c2. Donner une représentation à l'écran de f sur un intervalle convenable.

c3. Montrer que f est solution sur I d'une équation différentielle linéaire homogène que l'on précisera.

c4. En déduire une expression de $f(x)$ sans le signe de sommation et une nouvelle représentation à l'écran de f sur un intervalle convenable.

c5. Avec cette expression, donner une nouvelle méthode pour calculer les A_n et vérifier pour n dans $[\![0,12]\!]$.

c6. Préciser le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{n!} x^n$.

642.7

(cc by nc sa) *Concours Centrale Supélec - Math II*

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $c(n)$ le nombre de chiffres dans l'écriture de n en base 10. Par exemple : $c(1) = 1$, $c(9) = 1$, $c(10) = 2$, $c(99) = 2$, $c(1789) = 4$.

(a) Une entier k dans $\mathbb{N}^*$ étant donné, combien y a-t-il d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $c(n) = k$?

(b) b1. Écrire une fonction permettant de calculer $c(n)$. Tester avec $c(100!)$.

b2. Écrire une fonction `Couples(k)` permettant de compter le nombre de couples (a, b) d'entiers à k chiffres tels que le produit ab comporte $2k$ chiffres.

b3. Pour $k = 1$, 2 et 3, calculer $\dfrac{\texttt{Couples}(k)}{81 \times 10^{2k-2}}$.

(c) On note p_n la probabilité pour que deux nombres entiers à n chiffres choisis indépendamment, aient un produit ayant $2n$ chiffres.

c1. Exprimer p_n à l'aide de la fonction `Couples(n)`.

c2. On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x. Montrer que :

$$1 - p_n = \frac{1}{81 \times 10^{2n-2}} \sum_{k=10^{n-1}}^{10^n - 1} \left(\left\lfloor \frac{10^{2n-1} - 1}{k} \right\rfloor - 10^{n-1} + 1 \right)$$

(d) d1. Calculer $A_n = \displaystyle\sum_{k=10^{n-1}}^{10^n - 1} (10^{n-1} - 1)$.
Donner un équivalent de A_n en l'infini.

d2. Déterminer un équivalent de $B_n = \displaystyle\sum_{k=10^{n-1}}^{10^n - 1} \left\lfloor \frac{10^{2n-1} - 1}{k} \right\rfloor$ en l'infini.
On pourra comparer à une intégrale.

d3. En déduire que la suite $(p_n)_n$ est convergente.
Déterminer sa limite ; en donner une valeur approchée décimale raisonnable.

642.8

(cc)(by)(nc)(sa) *Concours Centrale Supélec - Math II*

Soit n un entier naturel. On dispose de $(n+1)$ urnes $U_0, \ldots, U_n$. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, l'urne U_j contient $j+1$ boules numérotées de 0 à j. On effectue une succession de tirages d'une boule avec remise selon le protocole suivant :

- au premier tirage, on tire une boule avec remise dans l'urne U_n ;
- à l'issue de ce premier tirage, si on obtient la boule numéro j ($j \in [\![0, n]\!]$), le second tirage s'effectue dans l'urne U_j ;
- on continue alors les tirages selon la même règle : pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, on tire une boule avec remise au k-ième tirage et on note le numéro j de la boule tirée. Le $(k+1)$-ième tirage s'effectue alors avec remise dans l'urne U_j.

Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro tiré lors du k-ième tirage. Le premier tirage ayant lieu dans l'urne U_n, on pose $X_0 = n$.
Pour tout entier naturel k, on considère la matrice W_k dans $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et la matrice A dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définies par :

$$W_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 0) \\ P(X_k = 1) \\ \vdots \\ P(X_k = n) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel k, on note $E(X_k)$ l'espérance de X_k.

(a) a1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

a2. Déduire du résultat précédent que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite P dont on précisera brièvement la nature géométrique.

a3. Écrire une fonction `matriceA(n)` qui prend en paramètre un entier n et renvoie la matrice A correspondante.

a4. En utilisant la fonction `linalg.eig` de `numpy` déterminer le vecteur propre associé à la valeur propre 1 de A.

(b) Écrire une fonction qui prend en paramètres deux entiers k et n et renvoie une liste contenant le résultat de k tirages (on pourra utiliser la fonction `random.randint` du module `random` de Python).
Tester plusieurs fois avec $n = 10$ (puis $n = 100$) et $k = 50$.

(c) c1. Pour tout j dans $[\![0, n]\!]$, écrire $P(X_{k+1} = j)$ en fonction de certains des nombres $P(X_k = i)$ pour i dans $[\![0, n]\!]$.

c2. En déduire la relation : $W_{k+1} = AW_k$ puis une expression de W_k en fonciton de A et de W_0.

c3. Écrire une fonction en Python qui prend en paramètres deux entiers k et n qui engendre le vecteur W_0, calcule A^k (en utilisant `matriceA(n)`) et renvoie le vecteur W_k correspondant.
Tester le programme avec $n = 10$ (puis $n = 100$) et $k = 20$.

(d) d1. Déterminer la matrice B dans $\mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telle que $BW_k = E(X_k)$.

d2. Calculer le produit BA en fonction de B.

d3. Pour tout entier naturel k, exprimer $E(X_{k+1})$ en fonction de $E(X_k)$.

d4. En déduire l'expression de $E(X_k)$ en fonction de k et n.
Ce résultat est-il en accord avec les résultats théoriques et empiriques précédents ?

642.9

🅭🅯🄏🄎 *Concours Centrale Supélec - Math II*

Pour les simulations informatiques sous Python, on importera les bibliothèques scientifiques à l'aide des instructions suivantes :

```
import numpy as np
import math
import scipy.optimize as resol
import matplotlib.pyplot as plt
```

On considère sur $\mathbb{R}_+$ l'équation, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0 \tag{$\mathcal{E}_n$}$$

(a) Montrer que $\mathcal{E}_n$ admet une unique solution notée u_n, pour tout entier $n \geqslant 1$.

(b) Afficher les 100 premières valeurs approchées de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, en utilisant :

   b1. la fonction `fsolve` du fasicule ;

   b2. une implémentation de recherche dichotomique.

(c) Que peut-on raisonnablement conjecturer ? Démontrer rigoureusement ce fait.

(d) Écrire une fonction `binome` telle que `binome(n,p)` calcule $\binom{n}{p}$ pour $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leqslant p \leqslant n$.

(e) e1. Montrer la convergence et vérifier avec le logiciel pour quelques valeurs de $p \geqslant 1$, la relation :

$$u_p = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p+1)+1} \times n} \binom{n(p+1)}{n-1} \tag{$\mathcal{T}_p$}$$

   e2. Montrer le relation, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{2k+1}k} \binom{2k}{k-1} = \frac{1}{2} - \frac{2(n+2)}{2^{2n+3}(n+1)} \binom{2(n+1)}{n}$$

   e3. En déduire la relation $\mathcal{T}_1$.

(f) f1. Vérifier avec le logiciel que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + a_n^5)$$

   converge vers le réel u_4.

   f2. Démontrer avec soin cette propriété et en déduire un autres algorithme très simple permettant d'approcher u_p, pour tout entier $p \geqslant 1$.

(g) On pose $b_n = u_n - \frac{1}{2}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n$.

642.10

🅭🅯🄏🄎 *Concours Centrale Supélec - Math II*

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par :

$$\forall P, Q \in (\mathbb{R}[X])^2,\ \langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Pour les simulations informatiques sous Python, on importera les bibliothèques scientifiques à l'aide des instructions suivantes :

```
from numpy.polynomial import Polynomial
from math import *
```

(a) Vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien un produit scalaire.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et on admettra que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

b1. Trouver une relation entre I_n et I_{n-2}.
Écrire une fonction récursive `Calcul(n)` qui renvoie la valeur de I_n.

b2. Calculer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Écrire une fonction `ps(P,Q)` qui renvoie le produit scalaire ci-dessus de P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ avec l'aide de la fonction calcul.

(d) Soit $(P_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de polynômes définie par $P_0 = 1$, $P_1 = X - \dfrac{1}{2}$ et :

$$\forall n \geqslant 2,\ P_n' = P_{n-1} \text{ et } \int_0^1 P_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

d1. Exprimer P_n en fonction de P_{n-1}.

d2. Écrire une fonction `Poly1(n)` qui renvoie la valeur de P_n.

d3. Calculer P_n pour $n \in [\![0,5]\!]$ et $\langle P_i, P_j\rangle$ pour $(i,j) \in [\![0,5]\!]^2$.

(e) Soit $f\ :\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

e1. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{-x^2} H_n(x)$$

e2. Trouver une relation entre H_{n+2}, H_{n+1} et H_n.

e3. Écrire une fonction `Poly2(n)` qui renvoie la valeur de H_n.

e4. Calculer H_n pour $n \in [\![0,5]\!]$ et $\langle H_i, H_j\rangle$ pour $(i,j) \in [\![0,5]\!]^2$. Observation.

642.11

(cc by nc sa) *Concours Centrale Supélec - Math II*

Pour les simulations informatiques sous Python, on importera les bibliothèques scientifiques à l'aide des instructions suivantes :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg
```

Soit $(a_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$. On considère la matrice $A(a_1,\dots,a_n)$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 0 \end{pmatrix}$$

(a) On suppose dans cette question que $n = 4$.

a1. Écrire une fonction `Python` de paramètre (a,b,c,d) qui calcule la matrice $A(a,b,c,d)$.

a2. Donner les valeurs propres des matrices $A(1,2,3,4)$, $A(4,3,2,1)$ et $A(-3,-1,1,2)$.
En déduire une conjecture sur les valeurs propres de la matrice $A(a,b,c,d)$.

a3. Donner les vecteurs propres des matrices $A(1,2,3,4)$, $A(4,3,2,1)$ et $A(-3,-1,1,2)$.
On pourra faire des rapports de coordonnées d'un vecteur pour l'identifier.
Que peut-on dire de la matrice dans les trois cas ?

(b) Montrer les conjectures précédentes dans le cas général.

(c) On suppose que les réels $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont strictement positifs et que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Que peut-on dire de la suite $(A(a_1,\ldots,a_n)^m)_{m\in\mathbb{N}}$?

642.12

Centrale II

Soit $\alpha > 0$ et $H = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On s'intéresse au couple de v.a. défini par :

$$P(X=p, Y=q) = \frac{\alpha}{p^q} \qquad \text{pour } p,q \in H$$

(a) a1. Donner la loi marginale de X.

a2. Cacluler $r_n = \sum\limits_{p=2}^{n} P(X=p)$.
En déduire la valeur de α.

a3. X admet-elle une espérance ?

a4. Donner une approximation décimale correcte de $P(X=Y)$.

(b) b1. Programmer $f(x)$ qui, pour $x \in [0,1[$, renvoie l'entier n non nul tel que :

$$r_{n-1} \leqslant x < r_n$$

b2. On pose $S_{p,q} = \sum\limits_{k=2}^{q} \frac{1}{p^k}$.
Programmer $g(y,p)$ qui, pour $y \in [r_{p-1}, r_p[$, renvoie l'entier q non nul tel que :

$$S_{p,q-1} \leqslant y - r_{p-1} < S_{p,q}$$

(c) Proposer une procédure informatique qui permet de simuler le résultat des deux v.a. X et Y.
On utilisera la fonction `numpy.random.random()` qui renvoie un $x \in [0,1[$ tel que, si X désigne la v.a. correspondant au résultat, on a pour tout a,b $P(a \leqslant X < b) = b - a$, et on simulera 25 expériences.

(d) Je ne me souviens plus. Il était question de la question précédente et de $P(X=Y)$.