SLED
CCS – MP – 2022

1 Mise en place d'un modèle numérique pour le Sled $0.3g$

1.1 Commande en vitesse sans correction

Objectif L'objectif consiste dans un premier temps à valider, à partir d'un modèle, le principe d'une structure d'asservissement en vitesse, sur une commande en accélération.

Question 13 *Quels sont les rôles respectifs des blocs A et B du modèle n°1 (*FIGURE **??***) ?*

Correction Le bloc A est un intégrateur : $A(p) = \dfrac{1}{p}$.

Le bloc B est un dérivateur : $B(p) = p$.

Question 14 *Justifier cette proposition en déterminant la fonction de transfert en accélération $H_{acc}(p)$ en fonction de $H_{BF}(p)$. Conclure sur l'intérêt de cette proposition.*

Correction On a $H_{\text{acc}}(p) = \dfrac{1}{\cancel{p}} \times H_{\text{BF}}(p) \times \cancel{p} = H_{\text{BF}}(p)$.

L'intérêt de cette proposition est de pouvoir contrôler le système en vitesse, à l'aide d'une mesure d'accélération (plus simple à implémenter sur le système à l'aide d'un accéléromètre qui fournit directement l'accélération du solide S.

Question 15 *Évaluer graphiquement les marges de stabilité du système et conclure sur le respect de l'exigence* `Id = 1.1.1.1.1`.

Correction L'exigence `Id = 1.1.1.1.1` requiert une marge de gain $M_{\text{gain}} > 7$ dB et une marge de phase $M_\varphi > 30°$.

En FIGURE **??**, on remarque que le gain n'est jamais positif ou nul ; donc la marge de phase n'est pas définie, mais elle est positive car la phase est toujours supérieure à -180°.

De même, la phase n'atteint jamais la valeur de $-180°$, on peut observer une asymptote, la marge de gain est donc infinie (ou n'existe pas).

L'exigence `Id = 1.1.1.1.1` est donc respectée.

Question 16 *Calculer les valeurs numériques des paramètres K_{BO}, $\omega_{0_{BO}}$ et ξ_{BO} de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$ de l'asservissement en vitesse.*

Correction $K_{\mathbf{BO}}$: si l'asymptote horizontale est située à -41.5 dB, alors on a

$$20\log_{10}(K_{\text{BO}}) = -41.5 \Leftrightarrow K_{\text{BO}} = 10^{-41.5/20} = 8.41 \times 10^{-3}$$

$\xi_{\mathbf{BO}}$: le gain en décibel lors de la pulsation de résonance permet de déterminer la valeur du facteur d'amortissement. On a $20\log_{10}\left(\left|H_{BO}(j\omega_{reson.})\right|\right)=20\log_{10}\left(\dfrac{K_{BO}}{\sqrt{\left(1-\left(\dfrac{\omega_{reson.}}{\omega_{0_{BO}}}\right)^2\right)^2+\left(\dfrac{2\xi_{BO}\omega_{reson.}}{\omega_{0_{BO}}}\right)^2}}\right)$

d'après la relation de la pulsation de résonance $\omega_{reson.}=\omega_{0_{BO}}\times\sqrt{1-2\xi_{BO}^2}$, on obtient le gain en décibel suivant :

$$\begin{aligned}20\log_{10}\left(\left|H_{BO}(j\omega_{reson.})\right|\right) &= 20\log_{10}\left(\frac{K_{BO}}{\sqrt{\left(1-\sqrt{1-2\xi_{BO}^2}\right)^2+\left(2\xi_{BO}\sqrt{1-2\xi_{BO}^2}\right)^2}}\right)\\ &= 20\log_{10}(K_{BO})-20\log_{10}\left(2\xi_{BO}\sqrt{1-\xi_{BO}^2}\right)\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}& -20\log_{10}\left(2\xi_{BO}\sqrt{1-\xi_{BO}^2}\right)=1.1\\ \Leftrightarrow\ & 2\xi_{BO}\sqrt{1-\xi_{BO}^2}=10^{-1.1/20}\\ \Leftrightarrow\ & 4\xi_{BO}^2\left(1-\xi_{BO}^2\right)=10^{-2.2/20}\\ \Leftrightarrow\ & 4\xi_{BO}^2-4\xi_{BO}^4=10^{-2.2/20}\\ \Leftrightarrow\ & 4\xi_{BO}^4-4\xi_{BO}^2+10^{-2.2/20}=0\end{aligned}$$

$$\Delta=(-4)^2-4\times4\times10^{-2.2/20}\simeq 3.6$$

$$\xi_{BO}^2=\frac{-(-4)\pm\sqrt{\Delta}}{2\times 4}=\{0.737;0.263\}$$

$$\xi_{BO}=\{0.859;0.513\}\quad \text{(car } \xi_{BO} \text{ est défini positivement)}$$

$$\xi_{BO}=0.513\quad \text{(car la résonance impose } \xi_{BO}<\sqrt{2}/2\simeq 0.707\text{)}$$

$\omega_{0_{BO}}$: on a simplement

$$\omega_{0_{BO}}=\frac{\omega_{reson.}}{\sqrt{1-2\xi_{BO}^2}}$$

A.N. :

$$\omega_{0_{BO}}=\frac{49.4}{\sqrt{1-2\times 0.513^2}}\simeq 71.8\ \text{rad.s}^{-1}$$

Question 17 *Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$ en fonction de K_{BO}, $\omega_{0_{BO}}$ et ξ_{BO}. Identifier ses coefficients K_{BF}, $\omega_{0_{BF}}$ et ξ_{BF} en fonction de K_{BO}, $\omega_{0_{BO}}$ et ξ_{BO}.*

Correction D'après la FIGURE **??** et la formule de Black, on obtient l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée suivante :

$$H_{BF}(p)=\frac{H_{BO}(p)}{1+H_{BO}(p)}=\frac{\dfrac{K_{BO}}{1+\dfrac{2\xi_{BO}}{\omega_{0_{BO}}}p+\dfrac{1}{\omega_{0_{BO}}^2}p^2}}{1+\dfrac{K_{BO}}{1+\dfrac{2\xi_{BO}}{\omega_{0_{BO}}}p+\dfrac{1}{\omega_{0_{BO}}^2}p^2}}=\frac{\dfrac{K_{BO}}{1+K_{BO}}}{1+\dfrac{2\xi_{BO}}{\omega_{0_{BO}}(1+K_{BO})}p+\dfrac{1}{\omega_{0_{BO}}^2(1+K_{BO})}p^2}$$

d'où l'identification suivante :

$$\left\{\begin{aligned}K_{BF}&=\frac{K_{BO}}{1+K_{BO}}\\ \omega_{0_{BF}}&=\omega_{0_{BO}}\sqrt{(1+K_{BO})}\\ \xi_{BF}&=\frac{\xi_{BO}}{\sqrt{1+K_{BO}}}\end{aligned}\right.$$

La suite du questionnement sera effectuée avec les valeurs numériques suivantes :

$$K_{BO}=8.4\times10^{-3},\quad \xi_{BO}=0.5,\quad K_{BF}=8.3\times10^{-3},\quad \omega_{0_{BF}}=71.9\ \text{rad.s}^{-1},\quad \xi_{BF}=0.5$$

L'abaque du premier dépassement relatif en fonction du facteur d'amortissement est donné en FIGURE **??**.

Question 18 *Déterminer la valeur en % du premier dépassement et conclure au regard de l'exigence* `Id = 1.1.1.1.2`.

Correction Connaissant le facteur d'amortissement en boucle fermé $\xi_{\mathrm{BF}} = 0.5$, on peut lire en FIGURE **??** un dépassement de 0.16 soit 16% environ.

L'exigence `Id = 1.1.1.1.2` avec un dépassement qui doit être inférieur à 20% est donc bien respectée.

Question 19 *Déterminer l'expression de l'erreur d'accélération en régime permanent ε_a suite à une entrée de type échelon en accélération d'amplitude 0.3g en fonction de K_{BO}. Faire l'application numérique.*

Correction L'erreur d'accélération (à ne pas confondre avec l'écart) est défini comme suit :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\mathrm{acc}} &= \lim_{t\to\infty} a_{\mathrm{consigne}}(t) - a_{\mathrm{simulé}}(t) \\
&= \lim_{p\to 0} p \times \left(a_{\mathrm{consigne}}(p) - a_{\mathrm{simulé}}(p)\right) \quad \text{d'après le théorème de la valeur finale} \\
&= \lim_{p\to 0} p \times \left(p\,V_{\mathrm{consigne}}(p) - p\,V_{\mathrm{simulée}}(p)\right) \\
&= \lim_{p\to 0} p \times p\,V_{\mathrm{consigne}}(p)\left(1 - H_{\mathrm{BF}}(p)\right) \\
&= \lim_{p\to 0} p \times a_{\mathrm{consigne}}(p)\left(1 - H_{\mathrm{BF}}(p)\right) \\
&= \lim_{p\to 0} \cancel{p} \times \frac{0.3g}{\cancel{p}} \left(1 - \frac{\dfrac{K_{\mathrm{BO}}}{1+K_{\mathrm{BO}}}}{1 + \dfrac{2\xi_{\mathrm{BO}}}{\omega_{0_{\mathrm{BO}}}(1+K_{\mathrm{BO}})}p + \dfrac{1}{\omega_{0_{\mathrm{BO}}}^2(1+K_{\mathrm{BO}})}p^2}\right) \\
&= 0.3g\left(1 - \frac{K_{\mathrm{BO}}}{1+K_{\mathrm{BO}}}\right)
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{acc}} = \frac{0.3g}{1+K_{\mathrm{BO}}}$$

A.N. :

$$\varepsilon_{\mathrm{acc}} = \frac{0.3 \times 9.81}{1 + 8.4 \times 10^{-3}} \simeq 2.918 \text{ m.s}^{-2}$$

Question 20 *En déduire l'erreur relative en % et conclure sur l'exigence* `Id = 1.1.1.2.1`.

Correction L'erreur relative vaut :

$$\varepsilon_{\mathrm{relatif}} = \lim_{t\to\infty} \frac{a_{\mathrm{consigne}}(t) - a_{\mathrm{simulé}}(t)}{a_{\mathrm{consigne}}(t)} = \frac{\varepsilon_{\mathrm{acc}}}{0.3g} = \frac{\dfrac{\cancel{0.3g}}{1+K_{\mathrm{BO}}}}{\cancel{0.3g}} = \frac{1}{1+K_{\mathrm{BO}}}$$

A.N. : $\varepsilon_{\mathrm{relatif}} = \dfrac{1}{1+8.4\times 10^{-3}} \simeq 0.992$ soit : 99.2%. L'exigence `Id = 1.1.1.2.1` n'est donc pas respectée.

1.2 Introduction d'une correction

1.2.1 Réglage d'un correcteur proportionnel vis-à-vis du critère de précision

Question 21 *À partir de l'expression de ε déterminée à la question 19 montrer qu'un correcteur proportionnel de gain pur $K_{\text{corr. gain pur}}$ placé dans la chaîne directe, ou chaîne d'action, permet d'améliorer l'erreur relative observée à la question 20.*

Correction On a $\varepsilon_{\mathrm{acc}} = \dfrac{0.3g}{1+K_{\mathrm{BO}}}$, donc si on ajoute un correcteur de type gain pur, l'erreur d'accélération deviendra :

$$\varepsilon_{\mathrm{acc}} = \frac{0.3g}{1 + K_{\text{corr. gain pur}} \times K_{\mathrm{BO}}}$$

L'objectif étant de diminuer cette erreur, on voit que ce gain pur devra donc être supérieur à 1. Ceci améliorera alors l'erreur relative observée à la question 20.

Question 22 *Déterminer la valeur de $K_{\text{corr. gain pur}}$ permettant d'atteindre l'exigence* `Id = 1.1.1.2.1`.

Correction On cherche à avoir $\varepsilon_{\text{relatif}} < 10\%$, d'où d'après la question 20 et 21 :

$$\varepsilon_{\text{relatif}} = \frac{1}{1 + K_{\text{corr. gain pur}} \times K_{\text{BO}}} < 0.1$$

$$1 + K_{\text{corr. gain pur}} \times K_{\text{BO}} > \frac{1}{0.1} = 10$$

$$K_{\text{corr. gain pur}} > \frac{9}{K_{\text{BO}}}$$

A.N. :

$$K_{\text{corr. gain pur}} > \frac{9}{8.4 \times 10^{-3}} = 1071.4$$

1.2.2 Réglage d'un correcteur proportionnel vis-à-vis du critère de dépassement

Question 23 **À partir de l'expression de ξ_{BF} déterminée à la question 17, montrer qu'un correcteur proportionnel de gain pur $K_{corr. gain pur}$ placé dans la chaîne directe, ou chaîne d'action, a une influence sur le dépassement observé à la question 18. Préciser alors le sens de variation du dépassement en fonction du gain $K_{corr. gain pur}$.*

Correction On avait en question 18 : $\xi_{\text{BF}} = \dfrac{\xi_{\text{BO}}}{\sqrt{1 + K_{\text{BO}}}}$, en ajoutant un correcteur proportionnel de gain pur, le coefficient d'amortissement devient :

$$\xi_{\text{BF}} = \frac{\xi_{\text{BO}}}{\sqrt{1 + K_{\text{corr. gain pur}} \times K_{\text{BO}}}}$$

On remarque que plus le $K_{\text{corr. gain pur}}$ augmente (lorsqu'il est supérieur à 1), plus le facteur d'amortissement diminue, ce qui implique que le dépassement sera plus important (d'après la FIGURE **??**).

Question 24 *Vérifier si l'exigence* `Id = 1.1.1.1.2` *est respectée avec la valeur de $K_{corr. gain pur}$ déterminée à la question 22.*

Correction

$$\xi_{\text{BF}} = \frac{\xi_{\text{BO}}}{\sqrt{1 + K_{\text{corr. gain pur}} \times K_{\text{BO}}}}$$

A.N. :

$$\xi_{\text{BF}} = \frac{0.5}{\sqrt{1 + 476.2 \times 8.4 \times 10^{-3}}} \simeq 0.13$$

À l'aide de la FIGURE **??**, on obtient un premier dépassement d'environ 0.62, soit 62%.
L'exigence `Id = 1.1.1.1.2` (dépassement inférieur à 20%) n'est donc toujours pas respectée.

1.2.3 Choix et réglage d'un correcteur proportionnel-intégral

Le correcteur choisi par les ingénieurs du bureau d'études est un correcteur proportionnel-intégral, noté PI, de la forme

$$C(p) = K_{\text{corr}} \left(\frac{1 + T_{\text{corr}} p}{T_{\text{corr}} p} \right) = K_{\text{corr}} \left(1 + \frac{1}{T_{\text{corr}} p} \right) = K_{\text{corr}} \left(1 + \frac{\omega_{\text{corr}}}{p} \right)$$

Question 25 *À l'aide des sections 3.2.1 et 3.2.2, indiquer en quoi l'utilisation d'un correcteur proportionnel n'est pas suffisante dans le cas du Sled. Justifier le choix d'un correcteur proportionnel-intégral.*

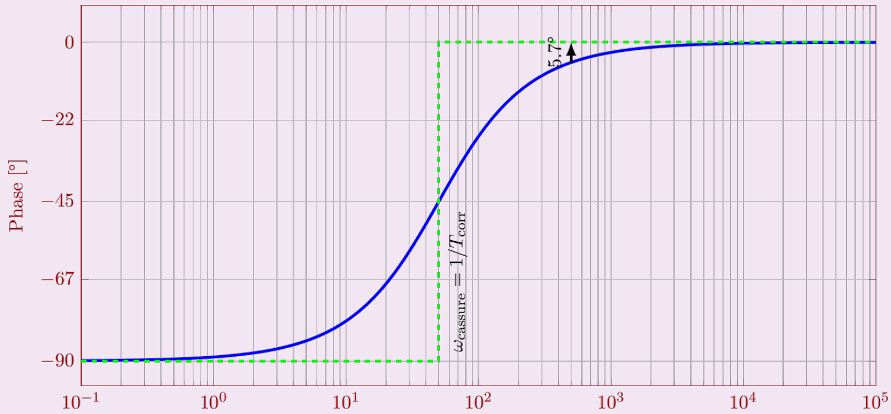
Correction On a vu en section 3.2.1 qu'avec un correcteur proportionnel permettait de respecter l'exigence `Id = 1.1.1.2.1` concernant l'écart relatif. Mais en section 3.2.2 on s'est aperçu que le critère de dépassement (exigence `Id = 1.1.1.1.2`) ne peut être respecté (car il faudrait diminuer $K_{\text{corr. gain pur}}$ pour diminuer le dépassement, mais cela impliquerait que nous perdions le respect de l'exigence de précision sur l'écart relatif).

Un correcteur proportionnel-intégral permet d'augmenter la classe de la FTBO et donc d'avoir $\varepsilon_{\text{relatif}} = 0$ et cela indépendamment de la valeur de $K_{\text{corr. gain pur}}$. Ainsi on peut régler $K_{\text{corr. gain pur}}$ afin de respecter l'exigence de dépassement `Id = 1.1.1.1.2`.

Question 26 *Tracer sur la copie le diagramme asymptotique de la phase du diagramme de Bode théorique du correcteur proportionnel-intégral. Préciser ses caractéristiques principales. Compléter le diagramme asymptotique de la phase avec l'allure du diagramme réel de phase du correcteur.*

Correction La phase du correcteur s'écrit : $\varphi = \arg(K_{\text{corr}}) + \arg\left(\dfrac{1 + jT_{\text{corr}}\omega}{jT_{\text{corr}}\omega}\right) = 0 + \arctan(T_{\text{corr}}\omega) - \arg(jT_{\text{corr}}\omega)$ $= -90 + \arctan(T_{\text{corr}}\omega)$

On obtient alors le diagramme de Bode suivant pour la phase :



Question 27 *Exprimer $\Phi(H_{BO}(\omega_{c\,0\,dB}))$ en fonction de MP.*

Correction

$$\Phi(H_{\text{BO}}(\omega_{c0\,\text{dB}})) = -180° + MP$$

Question 28 *Exprimer $\Phi(H_{BO}(\omega_{c\,0\,dB}))$ en fonction de $\Phi(H_{BO\,nc}(\omega_{c\,0\,dB}))$, de T_{corr} et de $\omega_{c\,0\,dB}$.*

Correction

$$\Phi(H_{\text{BO}}(\omega_{c0\,\text{dB}})) = \Phi(H_{\text{BO nc}}(\omega_{c0\,\text{dB}})) - 90° + \arctan(T_{\text{corr}}\omega_{c0\,\text{dB}})$$

Question 29 *En déduire l'expression de $\Phi(H_{BO\,nc}(\omega_{c\,0\,dB}))$ en fonction de MP, de T_{corr} et de $\omega_{c\,0\,dB}$*

Correction

$$\Phi(H_{\text{BO nc}}(\omega_{c0\,\text{dB}})) = -90° + MP - \arctan(T_{\text{corr}}\omega_{c0\,\text{dB}})$$

Question 30 *Préciser comment est déterminée la pulsation de cassure du correcteur dans la méthode décrite dans le code Python de la* FIGURE **??** *(ligne 26).*

Correction La pulsation de cassure du correcteur est choisi à une décade de la pulsation de coupure à 0 dB de la fonction de transfert non corrigée. Cela implique un déphasage au niveau de la pulsation de coupure à 0 dB de 5.7°, ce qui a été pris en compte ligne 21.

Question 31 *Retrouver la valeur 5.7 ° utilisée ligne 21 dans la méthode décrite dans le code Python de la* FIGURE **??** .

Correction En se plaçant à une décade de la pulsation de cassure du correcteur (qui est la phase de coupure à 0

DM 1

dB de la fonction de transfert non corrigée), on obtient une phase de :

$$\phi = -90 + \arctan\left(\cancel{T_{\text{corr}}} \times \frac{10}{\cancel{T_{\text{corr}}}}\right) = -90 + \arctan(10) = -90 + 84.29 = -5.69°$$

Question 32 *Représenter cette valeur sur le tracé du diagramme de Bode de la phase du correcteur PI (question 26) et indiquer à quoi correspond cette valeur.*

Correction Cette valeur correspond au déphasage induit par l'ajout d'un correcteur dont la pulsation de cassure est située à une décade avant la pulsation de coupure à 0 dB de la fonction de transfert non corrigée. Pour régler la marge de phase d'une fonction de transfert avec un correcteur PI par la méthode du décalage à une décade, il faut prendre en compte et régler une marge de phase de :

$$MP = MP_{\text{voulue}} + 5.7°$$

Ce qui permet d'anticiper le déphasage du correcteur PI.

1.2.4 Validation des exigences

Question 33 *Évaluer graphiquement la marge de phase du système corrigé et conclure au regard de l'exigence* `Id = 1.1.1.1.1`.

Correction On lit graphiquement une marge de phase d'environ :

$$MP = 42° > 30° \qquad \text{exigence } \texttt{Id : 1.1.1.1.1}$$

Ce qui respecte l'exigence `Id : 1.1.1.1.1`.

Question 34 *Évaluer le premier dépassement suite à l'échelon de consigne de* $0.3g$ *et conclure au regard de l'exigence* `Id = 1.1.1.1.2`.

Correction Le premier dépassement que l'on peut observer en FIGURE **??** est de :

$$D_{\%} = \frac{3.6-3}{3} \times 100 = 0.2 \times 100 = 20\%$$

En ayant pris 3.6 m.s^{-2}, nous avons surestimé la mesure, on peut donc valider l'exigence `Id : 1.1.1.1.2` qui impose un dépassement inférieur à 20%.

Question 35 *Conclure, en justifiant, au regard de l'exigence* `Id = 1.1.1.2.1`.

Correction La précision indicielle est de :

$$\text{précision} = \frac{|0.3 \times g - 3.0|}{0.3 \times g} = \left|1 - \frac{3.0}{0.3 \times g}\right| = \left|1 - \frac{10}{g}\right|$$

A.N.

$$\text{précision} = \left|1 - \frac{10}{9.81}\right| = 0.019 = 1.9\% < 10\% \qquad \text{exigence } \texttt{Id : 1.1.1.2.1}$$

On ne peut pas valider toutes les exigences avec les études réalisées jusqu'ici, mais les exigences `Id : 1.1.1.1.1`, `Id : 1.1.1.1.2` et `Id : 1.1.1.2.1` sont validées avec un correcteur PI réglé à une décade.